UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTA' DI SCIENZE MM. FF. NN.

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA

TESI DI LAUREA

CRESCITA ESPONENZIALE ASINCRONA IN MODELLI DI POPOLAZIONE CON STRUTTURA DI ETÀ

RELATORE: PROF. ROSANNA BRESSAN VILLELLA
CORRELATORE: DOTT. LORENZA TONETTO

LAUREANDO: FRANCESCO VECIL

ANNO ACCADEMICO 2001-2002

a me mari,
ai miei nonos,
ai miei fradis,
ai miei nevòts.

Indice

INTRODUZIONE

In questa tesi si studiano modelli matematici di popolazioni che possiedono una struttura di età. In particolare viene messo in luce un tipo di comportamento asintotico detto "crescita esponenziale asincrona". I modelli sono costituiti da equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine con condizioni ai limiti costituite da equazioni integrali e con dati iniziali in spazî L^1 o prodotto di spazî L^1. A ciascun modello si associa un problema di Cauchy astratto

$$\begin{cases} n'(t) = An(t) \\ n(0) = n^0 \end{cases} \tag{1}$$

dove $n(t)$ è una funzione di $[0, \infty[$ in X, lo spazio di Banach dei dati iniziali, e A è un operatore lineare

$$A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \longrightarrow X.$$

Le condizioni ai limiti si traducono in condizioni sul dominio $\mathcal{D}(A)$.
Si proveranno esistenza ed unicità della soluzione $n(t)$ del problema (1) e poi si proverà che il comportamento asintotico del semigruppo delle soluzioni $(T_t)_{t \geq 0}$, dove $T_t n^0 = n(t)$, verifica questa proprietà:

$$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}, \ \exists P : X \longrightarrow X$$

dove P è una proiezione di rango uno, nel senso che $dim P(X) = 1$, tali che

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-\lambda_0 t} T_t n^0 = P n^0.$$

Questo significa che la crescita è di tipo esponenziale, e a seconda del segno del parametro di Malthus λ_0 la popolazione si estingue, rimane costante o "esplode".
Questa crescita è detta "asincrona" perché le fasce d'età della popolazione tendono ad una distribuzione costante indipendentemente da come sono disposte al tempo iniziale.

Lo strumento matematico che viene principalmente sfruttato è la teoria dei semigruppi di operatori. In particolare ha rilievo l'analisi spettrale. È fondamentale analizzare lo spettro $\sigma(A)$ dell'operatore A del problema (1),

che è il generatore infinitesimale del semigruppo $(T_t)_{t\geq 0}$.
Una condizione sufficiente affinché si presenti crescita esponenziale asincrona è che siano verificate queste ipotesi:

- A genera un semigruppo fortemente continuo
- esiste un autovalore λ_0 di A reale, strettamente dominante e di molteplicità algebrica pari a uno
- $\omega_{ess}(A) < \omega_0(A)$

dove ω_0 è il tipo del semigruppo e ω_{ess} il tipo essenziale (il loro significato non è evidente, per le definizioni si vedano i punti 1.32 e 1.33).
Ciò permette di provare che λ_0 è "lontano" dagli altri elementi dello spettro, nel senso che non è una accumulazione né per $\sigma(A)$ né per $Re\sigma(A) = \{Re\lambda, \lambda \in \sigma(A)\}$, e quindi di scrivere X come somma diretta di due spazi $X = X_1 \oplus X_2$, con $X_1 = ker[A - \lambda_0]$ (pertanto $dim_{\mathbb{R}} X_1 = 1$). Sarà esso l'immagine della proiezione P. Si prova che $\|e^{-\lambda_0 t}T_t x - Px\| \leq Me^{-\eta t}\|x\|$, con M e η costanti reali positive.
Può anche essere sfruttato un teorema che studia le proprietà del semigruppo anziché quelle del generatore. Tale teorema dice che se (T_t) è un semigruppo di operatori fortemente continuo, positivo, definitivamente compatto ed irriducibile, allora possiede la proprietà di crescita esponenziale asincrona. Le ipotesi di detto teorema sono condizioni sufficienti per trovare un autovalore λ_0 del generatore infinitesimale A che abbia le proprietà precedentemente esposte: la positività impone condizioni sullo spettro periferico di A, $\sigma_B(A) = \{s(A) + i\nu\mathbb{Z}\}\ \exists\nu \in \mathbb{R}$. Grazie alla definitiva compattezza si prova che $\sigma_B(A) = \{s(A)\}$ (quindi $s(A)$ è l'autovalore strettamente dominante) e che $\omega_{ess}(A) < \omega_0(A)$ e grazie all'irriducibilità che $s(A)$ ha molteplicità algebrica uno.

La crescita esponenziale asincrona viene provata in due modelli. Il primo è un modello cellulare: la popolazione viene suddivisa in due sottopopolazioni, le cellule quiescenti e le cellule prolifiche, descritte dalle densità $q(a,t)$ e $p(a,t)$: il numero di cellule quiescenti che al tempo t hanno età compresa fra a_i e a_f è $\int_{a_i}^{a_f} q(\alpha,t)d\alpha$ (idem per le prolifiche). Si introducono tre parametri: il tasso di divisione $\mu(a)$, che significa quante cellule della popolazione aventi età compresa fra a e $a + da$ si dividono, e due tassi di passaggio dalla condizione di prolificità alla condizione di quiescenza e viceversa, con notazioni rispettivamente $\sigma(a)$ e $\tau(a)$, e significato analogo a $\mu(a)$. Si suppone che le cellule nascano prolifiche, che possano cambiare stato in qualunque momento entro un'età massima a_1 oltre la quale perdono la capacità di dividersi, che i parametri siano indipendenti dal tempo e che le risorse a disposizione siano infinite; in più verranno poste alcune condizioni sul comportamento dei parametri vicino a 0 e a a_1.

Il modello si scrive

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial t} = -\mu p - \sigma p + \tau q \\ \frac{\partial q}{\partial a} + \frac{\partial q}{\partial t} = \sigma p - \tau q \\ p(0,t) = 2\int_0^{a_1} \mu(\xi) p(\xi,t) d\xi \\ q(0,t) = 0 \\ p(a,0) = p_0(a) \\ q(a,0) = q_0(a) \end{cases}$$

a cui si associa il problema di Cauchy astratto

$$\begin{cases} (p,q)' = A(p,q) \\ (p,q)(t=0) = (p_0, q_0) \end{cases}$$

$$X = (L^1(0,a_1) \times L^1(0,a_1), \|(p,q)\|_X = \|p\|_{L^1} + \|q\|_{L^1})$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial a} - \mu - \sigma & \tau \\ \sigma & -\frac{\partial}{\partial a} - \tau \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{D}(A) = \Big\{ (\phi, \psi) \in W^{1,1}(0,a_1) \times W^{1,1}(0,a_1) :$$

$$\phi(0) = 2\int_0^{a_1} \phi(\xi)\mu(\xi) d\xi, \psi(0) = 0 \Big\}.$$

Il secondo modello riguarda animali affetti da macroparassiti. La sua descrizione è piuttosto lunga; esso è un modello non lineare, ma la crescita esponenziale asincrona viene provata su una sua linearizzazione B intorno ad un punto di equilibrio. Sia X lo spazio di Banach

$$X = L^1(0,\infty) \times L^1(0,\infty) \times L^1(0,\infty) \times ...$$

con norma

$$\|p\|_X = \int_0^{+\infty} |p_0(a)| da + \sum_{i=1}^{-\infty} i \int_0^{+\infty} |p_i(a)| da$$

Si consideri $(\bar{A}, \mathcal{D}(\bar{A}))$ la chiusura dell'operatore:

$$[Ap]_i = -p_i' - [\mu + i(\alpha + \sigma)]p_i + \sigma(i+1)p_{i-1}$$

definito sul dominio

$$\mathcal{D}(A) = \{q \in X : q_i \in W^{1,1}([0,+\infty[), q_i(0) = 0, \exists N_q \in \mathbb{N}\ t.c.\ q_j = 0\ j > N_q\}$$

e dove μ, α e σ sono costanti reali e positive.
Sia

$$[\tilde{H}u](a) = \left(-C \sum_{i=0}^{-\infty} \int_0^{+\infty} u_i(s) ds \exp(-\mu a), 0, 0, ... \right)$$

dove C è una certa costante reale che dipende da come è scritto il modello non lineare. $\tilde{H} \in \mathcal{B}(X)$.
Sia

$$[\tilde{F}u]_0(a) = -[\tilde{F}u]_1(a) = -\frac{hK}{c+K} \sum_{i=1}^{+\infty} i \int_0^{+\infty} u_i(s) ds \mu \exp(-\mu a)$$

$$[\tilde{F}u]_i(a) = 0 \; per \; i \geq 2.$$

$\tilde{F}$ è lineare e continuo.
Sia infine B l'operatore lineare

$$B = A(I - \tilde{H}) + \tilde{F}.$$

con dominio

$$\mathcal{D}(B) = \left\{ q \in X : q_0(0) = \sum_{i=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} q_i(s) ds, q_i(0) = 0 \; i > 0 \right\}.$$

Il problema di Cauchy che si analizza è

$$\begin{cases} q'(t) = Bq(t) \\ q(0) = q^0 \end{cases}$$

Il secondo capitolo di questa tesi fornisce gli strumenti teorici necessarî ad affrontare l'analisi dei due modelli; definizioni, teoremi e proposizioni sono principalmenti stati presi da un libro di Ph. Clément, [1], e da uno di A. Pazy, [4].
Il terzo capitolo definisce la crescita esponenziale asincrona (asynchronus exponential growth, in inglese, da cui l'acronico A.E.G.), e dimostra due teoremi che danno delle condizioni sufficienti affinché essa sia verificata. Gli enunciati e le dimostrazioni sono riadattati dal libro di Ph. Clément, [1].
Il quarto capitolo imposta un modello relativo all'evoluzione di una popolazione di cellule. Sono esposte due derivazioni del modello, per via discreta e per via continua. La prima è adattata al modello voluto da un modello demografico piú semplice analizzato in un lavoro di E. Sánchez, [9]. La seconda è adattata da un altro modello demografico analizzato da M. Iannelli in [2].
Il quinto capitolo analizza il modello relativo all'evoluzione di una popolazione di cellule: questa analisi è tratta in parte dagli articoli di R. Bressan, J. Dyson, G. Webb, O. Arino e E. Sánchez, [7] e [8], e da un adattamento dell'analisi su un modello demografico fatta in [9] da Eva Sánchez.
Il sesto capitolo parla dell'impostazione di un modello studiato da Lorenza Tonetto e Andrea Pugliese, in [6]. Le derivazione del sistema di equazioni

differenziali è tratto dal lavoro di M. Iannelli, [2].
Il settimo capitolo prosegue lo studio del modello di Lorenza Tonetto e Andrea Pugliese. Un'analisi accurata dello spettro di alcuni operatori piú semplici permette una parziale analisi dello spettro dell'operatore B. Viene provato che in questo modello c'è A.E.G. sotto certe condizioni sui parametri. Rimangono aperti da studiare alcuni casi particolari.

Capitolo 1

SEMIGRUPPI DI OPERATORI

In questo capitolo vengono introdotti definizioni, proprietà e risultati sui semigruppi di operatori e sui loro generatori infinitesimali. In particolare ci si occupa di semigruppi positivi, definitivamente compatti e irriducibili e delle proprietà dello spettro dei loro generatori.

1.1 Reticoli di Banach

Definizione 1.1 (spazio vettoriale ordinato) *Uno spazio vettoriale X si dice ordinato, se è dotato di un ordine parziale $\leq$ che sia compatibile con la struttura di spazio vettoriale, i.e. sia invariante per traslazioni e renda la parte positiva dello spazio X, definita come $X_+ = \{x \in X$ tale che $x \geq 0\}$, un cono. In simboli, l'ordine deve soddisfare le seguenti proprietà:*

1. $x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z$ *per ogni* $z \in X$

2. $x \geq 0, \lambda \geq 0 \Longrightarrow \lambda x \geq 0.$

Definizione 1.2 (reticolo vettoriale) *X si dice un reticolo vettoriale se per ogni coppia di elementi x e y appartenenti a X si definiscono $sup(x, y)$ e $inf(x, y)$, generalmente scritti $x \vee y$ e $x \wedge y$.*

Ovviamente, potendo definire il *sup* e l'*inf* per una coppia di elementi, li si può definirli per ogni insieme finito di elementi.

Definizione 1.3 (valore assoluto) *Si definisce il valore assoluto di x nel modo seguente:*

$$|x| = -x \vee x.$$

Definizione 1.4 (reticolo di Banach) *Un reticolo di Banach è un reticolo vettoriale X tale che la norma per cui è completo $\|\cdot\|_X$ sia una norma di Riesz, i.e.*

$$|y| \leq |x| \Longrightarrow \|y\| \leq \|x\|.$$

Definizione 1.5 (ideale) *Dato X reticolo di Banach, $Y \subseteq X$ si definisce un ideale se Y è un sottospazio lineare di X e soddisfa*

$$y \in Y, x \in X, |x| \leq |y| \Longrightarrow x \in Y.$$

1.2 Semigruppi di operatori

Sia X uno spazio di Banach.

Definizione 1.6 (operatore lineare)

$$\mathcal{L}(X) = \{\textit{operatori lineari di } X \textit{ in } X\}.$$

Definizione 1.7 (operatore lineare e continuo)

$$\mathcal{B}(X) = \{\textit{operatori lineari e continui di } X \textit{ in } X\}.$$

Si ricordi che la continuità equivale sia alla limitatezza in norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)}$ sia alla continuità nell'origine.

Definizione 1.8 (operatore compatto) *Un operatore $T \in \mathcal{B}(X)$ si dice compatto ($T \in \mathcal{K}(X)$) se $T(\{x \in X$ tale che $\|x\| \leq 1\})$ è relativamente compatto.*

Definizione 1.9 (operatore chiuso) *Un operatore*

$$T : D(T) \subseteq X \longrightarrow X$$

si dice chiuso se, presa una successione

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(T)$$

vale

$$\begin{cases} f_n \to f \\ T(f_n) \to g \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f \in D(T) \\ g = T(f) \end{cases}$$

Sia d'ora in avanti (salvo diversa segnalazione) $(T_t)_{t\in[0,+\infty[} \subseteq \mathcal{B}(X)$, che per brevità verrà spesso scritto (T_t).

1.2.1 Definizione di semigruppo di operatori

Definizione 1.10 (semigruppo di operatori) *Si dice che $(T_t)_{t\geq 0}$ è un semigruppo di operatori se soddisfa:*

1. $T_0 = I$
2. $T_{t+s} = T_t T_s$.

1.2.2 Proprietà dei semigruppi: forte continuità, positività, definitiva compattezza ed irriducibilità

Definizione 1.11 (forte continuità) *Il semigruppo di operatori (T_t) è detto fortemente continuo (piú brevemente la notazione è C_0) se vale*

$$\lim_{t\downarrow 0} T_t x = x \ \forall x \in X.$$

Sia ora X un reticolo di Banach.

Definizione 1.12 (positività) *Il semigruppo $(T_t)_{t\geq 0}$ è detto positivo se*

$$T_t(X_-) \subseteq X_+ \text{ per ogni } t \geq 0.$$

Generalmente si ha a che fare con spazi di funzioni a valori reali, per cui la positività del semigruppo significa che esso manda funzioni non negative in funzioni non negative (spesso gli spazi saranno le funzioni L^p, per cui si intenderà $f \geq 0$ *quasi ovunque*). Nel caso di un modello di popolazioni, in cui il significato delle funzioni è il numero degli abitanti (o comunque una densità di abitanti rispetto all'età), la positività assume un chiaro significato fisico, nel senso che il numero di persone non può essere negativo. Inoltre, dal punto di vista matematico, la positività del semigruppo è una caratteristica molto rilevante, piú avanti si capirà il perché.

Definizione 1.13 (definitiva compattezza) *Il semigruppo $(T_t)_{t\geq 0}$ è detto definitivamente compatto se*

$$\text{esiste } t_0 \text{ reale positivo tale che } T_t \text{ sia compatto per ogni } t \geq t_0.$$

Definizione 1.14 (semigruppo irriducibile) *Il semigruppo $(T_t)_{t\geq 0}$ è detto irriducibile se*

$$\forall x \in X \setminus \{0\}, \forall x^* \in X^* \setminus \{0\}, \exists t_0 > 0 \text{ tale che } \langle x^*, T_{t_0} x \rangle > 0.$$

Questa definizione non è molto perspicua. Una definizione equivalente (e che assomiglia molto di piú alla definizione di matrice irriducibile) è la seguente:

Definizione 1.15 (semigruppo irriducibile) *$(T_t)_{t\geq 0}$ è irriducibile se gli unici ideali chiusi (T_t)-invarianti sono $\{0\}$ e X.*

1.2.3 Il generatore infinitesimale di un semigruppo

Definizione 1.16 (generatore infinitesimale) *Si definisce generatore infinitesimale del semigruppo $(T_t)_{t\geq 0}$ l'operatore*

$$Ax = \lim_{t\downarrow 0} \frac{T_t x - x}{t}$$

definito sul suo dominio massimale

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in X \text{ tale che } \lim_{t\downarrow 0} \frac{T_t x - x}{t} \text{ esista in } X\}.$$

1.2.4 Spettro di un operatore

Innanzitutto si avverte che la notazione $[A - \lambda]$ significa $[A - \lambda I]$.

Definizione 1.17 (autovalore) *Si definisce autovalore di un operatore lineare T un elemento $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che l'autospazio $ker[A - \lambda] \neq \{0\}$ (i.e. lo contiene strettamente).*

Definizione 1.18 (autospazio generalizzato) *Si definisce autospazio generalizzato relativo all'autovalore λ dell'operatore lineare T, e si denota $\mathcal{N}_\lambda(T)$, il seguente*

$$\mathcal{N}_\lambda(T) = \bigcup_{j=1}^{j=\infty} ker[(\lambda - T)^j].$$

Definizione 1.19 (insieme risolvente) *Si definisce come insieme risolvente dell'operatore chiuso A*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ t.c. } \exists[\lambda - A]^{-1} \text{ come operatore lineare e limitato su } X\}.$$

Definizione 1.20 (operatore risolvente) *Il risolvente dell'operatore lineare A è definito come la funzione di $\rho(A) \subseteq \mathbb{C}$ in $\mathcal{B}(X)$*

$$R[\lambda, A] = [A - \lambda]^{-1}.$$

Definizione 1.21 (spettro) *Lo spettro di A è il complementare dell'insieme risolvente:*

$$\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\rho(A).$$

Lo spettro $\sigma(A)$ può essere scritto come l'unione di tre sottoinsiemi a due a due disgiunti: lo spettro puntuale, lo spettro residuo e lo spettro continuo.

Definizione 1.22 (spettro puntuale)

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \text{ t.c. } [\lambda - A] \text{ non è iniettivo}\}.$$

Definizione 1.23 (spettro residuo)

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \text{ t.c. } [\lambda - A] \text{ è iniettivo e } \overline{Im[A-\lambda]} \neq X\}.$$

Definizione 1.24 (spettro continuo)

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \text{ t.c. } [\lambda - A] \text{ è iniettivo e } \overline{Im[A-\lambda]} = X\}.$$

L'insieme degli autovalori coincide con lo spettro puntuale (un operatore è iniettivo se e solo se il suo nucleo è ridotto a $\{0\}$, in qualsiasi dimensione si lavori).

Definizione 1.25 (molteplicità geometrica) *Si definisce molteplicità geometrica di $\lambda \in \mathbb{C}$ relativo all'operatore lineare A la dimensione dell'autospazio che esso genera:*

$$m_g[\lambda, A] = dimker[A - \lambda].$$

Se λ non è un autovalore, la sua molteplicità geometrica è chiaramente zero.

Definizione 1.26 (molteplicità algebrica) *Si definisce molteplicità algebrica di $\lambda \in \mathbb{C}$ relativo all'operatore lineare T la dimensione dell'autospazio generalizzato:*

$$m_a[\lambda, T] = dim[\mathcal{N}_\lambda(T)].$$

Definizione 1.27 (autovalore semplice) *Un autovalore è detto semplice quando la sua molteplicità algebrica è uno.*

Definizione 1.28 (autovalore dominante) *Un autovalore λ_0 viene detto dominante (strettamente dominante) se*

$$\forall \lambda \in \sigma(A)\backslash\{\lambda_0\}, Re\lambda \leq Re\lambda_0 \ (Re\lambda < Re\lambda_0).$$

Definizione 1.29 (spettro periferico) *Si può ora introdurre lo spettro periferico:*

$$\sigma_B(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \text{ t.c. } Re\lambda = s(A)\}.$$

dove $s(A)$ è definito alla 1.31

Definizione 1.30 (spettro essenziale di Browder) *Sia $\lambda \in \mathbb{C}$. Si considerino le seguenti proprietà:*

1. $\lambda = \lim_{n\to+\infty} \lambda_n, \exists \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \sigma(A)\backslash\{\lambda\}$
2. $Im[\lambda - A]$ *non chiusa in* X
3. $dim[\cup_{n=1}^{\infty} ker(\lambda - A)^n] = m_a[\lambda, A] = \infty$

$$\sigma_{ess}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ t.c. valga una delle proprietà sopraindicate}\}.$$

1.2.5 Alcune grandezze relative ai semigruppi

Definizione 1.31 (limite spettrale) *Si definisce il limite spettrale*

$$s(A) = sup\{Re\lambda \text{ t.c. } \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Definizione 1.32 (limite di crescita o tipo del semigruppo) *Si definisce limite di crescita del semigruppo oppure tipo del semigruppo* $(T_t)_{t>0}$

$$\omega_0(A) = inf\{\omega \in \mathbb{R} \text{ tale che } \exists M \geq 1 \text{ per cui vale } \|T_t\| \leq Me^{\omega t}\}$$

che si dimostra essere equivalente a

$$\omega_0(A) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\log\|T_t\|}{t} = \inf_{t>0} \frac{\log\|T_t\|}{t}.$$

Definizione 1.33 (limite essenziale di crescita) *Il limite essenziale di crescita del semigruppo si definisce cosí*

$$\omega_{ess}(A) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\log\|T_t\|_{ess}}{t} = \int_{t>0} \frac{\log\|T_t\|_{ess}}{t}.$$

Si conviene di porre $\log(0) = -\infty$*; in questo modo, se* $\|T_t\|_{ess} = 0$ *si ha* $\log\|T_t\|_{ess} = -\infty$.

La norma essenziale per $T \in \mathcal{B}(X)$ è definita da

Definizione 1.34 (norma essenziale)

$$\|T\|_{ess} = dist(T, \mathcal{K}(X)) = \inf\{\|T - K\|, \forall K \in \mathcal{K}(X)\}$$

ed esprime sostanzialmente quanto un operatore limitato è lontano dall'essere compatto.

Per un operatore $T \in \mathcal{B}(X)$ si definiscono inoltre delle altre grandezze.

Definizione 1.35 (raggio spettrale) *Il raggio spettrale è*

$$r(T) = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|$$

ed è finito, perché $\sigma(T)$ *è chiuso e contenuto in* $[-\|T\|, \|T\|]$ *(è compatto).*

Definizione 1.36 (raggio essenziale) *Il raggio essenziale è*

$$r_{ess}(T) = \sup_{\lambda\in\sigma_{ess}(T)} |\lambda|.$$

Definizione 1.37 (insieme additivamente ciclico) *Un sottoinsieme del piano complesso* $X \subseteq \mathbb{C}$ *è detto ciclico (piú precisamente additivamente ciclico) quando si può scrivere nella seguente maniera:*

$$X = \{\xi + i\nu k, k \in \mathbb{Z}\} \ \exists\xi \in \mathbb{R} \ \exists\nu \geq 0.$$

Poli del risolvente

Per spiegare che cosa sia un polo del risolvente $R[\lambda, A]$ (essendo A un operatore lineare), si passa attraverso l'analogia con le funzioni a variabile complessa.

Se f è olomorfa in $\mathcal{S}(z_0, r)\setminus\{z_0\}$, z_0 viene detta una singolarità isolata.

Definizione 1.38 (serie di Laurent) *La funzione f ammette allora uno sviluppo in serie all'interno della sfera di raggio r:*

$$\forall z \in \mathcal{S}(z_0, r)\setminus\{z_0\}$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

Ora le singolarità isolate possono esser distinte in tre tipi:

Definizione 1.39 (singolarità eliminabile) *z_0 è una singolarità eliminabile se nello sviluppo in serie di Laurent*

$$a_n = 0\ \forall n < 0.$$

Definizione 1.40 (polo di ordine m) *z_0 è un polo di ordine m se nello sviluppo in serie di Laurent*

$$a_n = 0\ \forall n < m \text{ e } a_{-m} \neq 0.$$

Definizione 1.41 (singolarità essenziale) *z_0 è una singolarità essenziale quando nello sviluppo in serie di Laurent*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m > n; a_{-m} \neq 0.$$

Per quanto riguarda il risolvente, la situazione è analoga, con la sola differenza che la funzione f considerata è a valori in $\mathcal{B}(X)$ invece che a valori complessi.
Sia dato X uno spazio di Banach e A un operatore lineare su X. La

$$\mathbb{C} \supseteq \rho(A) \longrightarrow \mathcal{B}(X)$$

$$\lambda \longmapsto [A - \lambda]^{-1} = R[\lambda, A]$$

è definita su un aperto del piano complesso perché $\rho(A)$ lo è.
Le singolarità sono allora i punti dello spettro di A. Sia $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Se λ_0 è un punto isolato, posso considerare lo sviluppo in serie di Laurent in un suo intorno:

$$[A - \lambda]^{-1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n(\lambda - \lambda_0)^n$$

dove i $B_j \in \mathcal{B}(X)$.

La classificazione delle singolarità isolate è identica al caso delle funzioni a valori complessi, si vedano le definizioni 1.39, 1.40 e 1.41, in cui i numeri complessi a_k vengono rimpiazzati dagli operatori B_k.

1.3 Teoremi e proposizioni

Proposizione 1.42 ([4], teorema I.2.2) *Per un semigruppo (T_t) fortemente continuo vale la seguente maggiorazione:*

$$\forall \omega > \omega_0(A)\ \exists M = M(\omega) \geq 1 \text{ t.c. } \|T_t\| \leq Me^{\omega t}.$$

dove ω_0 è la definizione 1.32.

Proposizione 1.43 *Se $\exists t_0 > 0$ tale che T_{t_0} sia compatto allora T_t è compatto $\forall t > t_0$, i.e. è definitivamente compatto.*

Teorema 1.44 (Hille-Yosida, [4], teorema I.3.1) *Un operatore lineare A è generatore infinitesimale di un semigruppo fortemente continuo tale che $\|T_t\| \leq e^{\omega t}$ se e solamente se*

1. *A è chiuso e $\mathcal{D}(A)$ è denso in X*
2. *l'insieme risolvente $\rho(A)$ di A contiene il raggio*

$$\{\lambda \text{ tale che } Im\lambda = 0, \lambda > \omega\}$$

e per questi λ si ha

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}.$$

Teorema 1.45 (perturbazione, [4], teorema III.1.1) *Sia X uno spazio di Banach, A_0 il generatore infinitesimale di un semigruppo $(T_0(t))$ che sia fortemente continuo. Sia B un operatore lineare e limitato di X in X. Se*

$$A = A_0 + B$$

è un operatore lineare chiuso (con domini $\mathcal{D}(A_0) = \mathcal{D}(A)$) allora A genera un semigruppo fortemente continuo, e vale

$$T_t x = T_0(t)x + \int_0^t T_0(t-s)BT(s)x ds.$$

Proposizione 1.46 *L'insieme risolvente $\rho(A)$ di un operatore lineare A è un aperto. Equivalentemente, lo spettro $\sigma(A)$ è un chiuso.*

Proposizione 1.47 ([1], proposizione 8.6) *Sia (T_t) un semigruppo di operatori fortemente continuo, e A il suo generatore infinitesimale. Allora*

1. $\sup\{Re\lambda \text{ t.c. } \lambda \in \sigma_{ess}(A)\} \leq \omega_{ess}(A)$
2. $\omega_0(A) = \max\{s(A), \omega_{ess}(A)\} = \max\{s_1(A), \omega_{ess}(A)\}$.

Teorema 1.48 ([1], teorema 8.14) *Sia $(T_t)_{t\geq 0}$ un semigruppo di operatori su X fortemente continuo e positivo, e sia $s(A) > -\infty$ un polo del risolvente $R[\lambda, A]$. Allora $\sigma_B(A)$ è ciclico.*

Proposizione 1.49 ([1], proposizione 8.3) *Sia (T_t) un semigruppo fortemente continuo; per ogni $t \geq 0$ si ha*

$e^{t\sigma(A)} \subseteq \sigma(T_t)$

Proposizione 1.50 ([1], (8.5) a pagina 200) *Sia (T_t) un semigruppo fortemente continuo a A il suo generatore infinitesimale. Vale*

$$r_{ess}(T_t) = e^{\omega_{ess}(A)t}.$$

Teorema 1.51 ([1], teorema 8.17) *Sia $(T_t)_{t\geq 0}$ un semigruppo di operatori su X fortemente continuo, positivo, irriducibile, e tale che $s(A) > -\infty$ sia un polo del risolvente $R[\lambda, A]$. Allora*

1. *$s(A)$ è un polo di ordine uno con molteplicità geometrica uno.*
2. *$\sigma_B(A) = s(A) + i\nu\mathbb{Z}$ per qualche ν reale non negativo, e questi elementi sono tutti poli di ordine uno di $R[\lambda, A]$ con molteplicità algebrica uno.*

Teorema 1.52 ([1], teorema A.3.1) *Sia L un operatore lineare chiuso. Sia*

$$R[\lambda, L] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^n B_n$$

lo sviluppo in serie di Laurent del risolvente presso λ_0.

1. *B_{-1} è una proiezione su X, $Im(B_{-1})$ e $Im(I - B_{-1})$ sono chiusi, e la restrizione di L a $Im(B_{-1})$ è limitata e ha spettro $\{\lambda_0\}$.*
2. *Se $Im(B_{-1})$ ha dimensione finita, allora λ_0 è un polo di $R[\lambda, L]$.*

Se λ_0 è un polo di $R[\lambda, L]$ di ordine p, allora λ_0 è un autovalore di L,

$$Im(B_{-1}) = ker((\lambda_0 - L)^p) = ker((\lambda_0 - L)^{p+1}) = ...$$

$$Im(I - B_{-1}) = Im((\lambda_0 - L)^p) = Im((\lambda_0 - L)^{p-1}) = ...$$

e

$$X = ker((\lambda_0 - L)^p) \oplus Im((\lambda_0 - L)^p).$$

Proposizione 1.53 (in [5]) *Sia λ_0 una singolarità isolata del risolvente $R[\lambda, A]$. Se λ_0 è un polo di ordine n, allora esso è un autovalore di molteplicità algebrica n e vale*

$$\mathcal{N}_{\lambda_0}(A) = ker[A - \lambda_0]^n.$$

Proposizione 1.54 ([4], corollario I.2.5) *Il generatore infinitesimale A di un semigruppo (T_t) fortemente continuo è chiuso ed il suo dominio è denso in X.*

Proposizione 1.55 ([1], theorem A.3.3) *Dato un operatore lineare L, sia*

$$\lambda_0 \in \sigma(L)\backslash\sigma_{ess}(L)$$

allora λ_0 è un polo del risolvente e B_{-1} ha rango finito.

Teorema 1.56 (equazioni integrali di Volterra, [2], teorema A.1.1) *Sia dato il sistema*

$$u(t) = \int_0^t K(t-s)u(s)ds + f(t).$$

Sia $K(\cdot)$ una funzione $L^1([0,\infty[)$-integrabile, $f(\cdot)$ una funzione $L^1([0,\infty[)$-integrabile. Allora esiste una unica funzione $R(\cdot) \in L^1{}_{loc}([0,\infty])$ tale che

$$u(t) = f(t) - \int_0^t R(t-s)f(s)ds.$$

Teorema 1.57 ([3], Sect. 2.2, Theorem 2.5) *Sia T un numero reale positivo, $J = [0,T]$ un intervallo della retta reale, a misurabile. Se vale una fra*

1. $a * b \in L^1(J)\forall b \in L^1(J)$
2. $a * b \in L^\infty(J)\forall b \in L^\infty(J)$

(sono equivalenti) allora l'applicazione

$$b \longmapsto a * b$$

definisce un operatore compatto in $L^p(0,T)$ per ogni p, $1 \leq p \leq \infty$.

1.4 Il problema di Cauchy astratto

Come riferimento si prenda [4], il capitolo IV.

1.4.1 Il problema

Siano X uno spazio di Banach e A un operatore lineare da $\mathcal{D}(A) \subseteq X$ in X. Il problema di Cauchy astratto, con dato iniziale x, è:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = Au(t) \text{ per } t > 0 \\ u(t=0) = x \end{cases} \tag{1.1}$$

Risolverlo significa trovare una funzione $u(t)$ tale che

1. *$u(t) \in \mathcal{D}(A)$ per $t > 0$*

2. *$u \in C^1$*

3. *$u(t)$ risolva il problema 1.1.*

È ovviamente necessario che $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$: $u(t)$ appartiene a $\mathcal{D}(A)$ per ogni $t > 0$ e in $t = 0$ è continua, per cui $x = u(0) = \lim_{t \downarrow 0} u(t)$ è una aderenza per $\mathcal{D}(A)$, stante che $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ per $t > 0$.

1.4.2 Soluzione

Se A è generatore infinitesimale di un semigruppo (T_t) fortemente continuo, allora, per ogni $x \in \mathcal{D}(A)$ l'unica soluzione del problema è

$$u(t) = T_t x.$$

Teorema 1.58 ([4], teorema IV.1.3) *Sia A un operatore lineare con dominio denso in X, con un insieme risolvente $\rho(A)$ non vuoto. Il problema di Cauchy ha una unica soluzione che sia continua e derivabile su $[0, +\infty[$ per ogni condizione iniziale $x \in \mathcal{D}(A)$ se e solamente se A è generatore infinitesimale di un semigruppo (T_t) fortemente continuo.*

1.5 La matrice risolvente

Dato il problema differenziale

$$y'(x) = A(x)y(x)$$

dove

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

e

$$A \textit{ matrice } n \times n$$

si definisce *matrice risolvente* la somma della seguente serie:

$$W(x) = I + \int_{x_0}^{x} A(\xi)d\xi + \int_{x_0}^{x} d\xi \int_{x_0}^{\xi} A(\xi)A(\xi_1)d\xi_1 +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} d\xi \int_{x_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{x_0}^{\xi_1} A(\xi)A(\xi_1)A(\xi_2)d\xi_2 + ...$$

Siccome $W(x)$ dipende dalla scelta del dato iniziale sarebbe piú appropriato scrivere un indice, $W_{x_0}(x)$, ma ciò si sottintenderà.
Essa gode della proprietà

$$y(x) = W(x)y_0$$

avendo posto

$$y_0 = y(x_0).$$

Ovviamente vale

$$W(x_0) = I$$

perché tutti gli integrali si annullano.
Un'altra proprietà che essa ha è che

$$W'(x) = A(x)W(x).$$

Lo si prova, per semplicità, con una matrice 2×2, e con queste notazioni:

$$y(a) = \begin{pmatrix} p(a) \\ q(a) \end{pmatrix}$$

$$A(a) = \begin{pmatrix} a_{11}(a) & a_{12}(a) \\ a_{21}(a) & a_{22}(a) \end{pmatrix}$$

$$a_0 = 0.$$

In questo modo

$$p(a) = w_{11}(a)p(0) + w_{12}(a)q(0)$$

$$q(a) = w_{21}(a)p(0) + w_{22}(a)q(0)$$

Poi,

$$p'(a) = w'_{11}(a)p(0) + w'_{12}(a)q(0) = a_{11}p(a) + a_{12}q(a) =$$

$$= a_{11}(a)[w_{11}(a)p(0) + w_{12}(a)q(0)] + a_{12}(a)[w_{21}(a)p(0) + w_{22}(a)q(0)] =$$

$$= [a_{11}(a)w_{11}(a) + a_{12}(a)w_{21}(a)]p(0) + [a_{11}(a)w_{12}(a) + a_{12}(a)w_{22}(a)]q(0)$$

e analogamente

$$q'(a) = [a_{21}(a)w_{11}(a) + a_{22}(a)w_{21}(a)]p(0) + [a_{21}(a)w_{12}(a) + a_{22}(a)w_{22}(a)]q(0)$$

Essendo $p(0)$ e $q(0)$ dati indipendenti

$$w'_{11}(a) = a_{11}(a)w_{11}(a) + a_{12}(a)w_{21}(a)$$

$$w'_{12}(a) = a_{11}(a)w_{12}(a) + a_{12}(a)w_{22}(a)$$

$$w'_{21}(a) = a_{21}(a)w_{11}(a) + a_{22}(a)w_{21}(a)$$

$$w'_{22}(a) = a_{21}(a)w_{11}(a) + a_{22}(a)w_{22}(a)$$

Capitolo 2

CRESCITA ESPONENZIALE ASINCRONA

2.1 Crescita esponenziale asincrona (A.E.G.)

Definizione 2.1 (A.E.G.) *Il semigruppo $(T_t)_{t\geq 0}$ ha crescita esponenziale asincrona se $\exists\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\exists P$ proiezione di rango uno tali che*

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-\lambda_0 t}T_t x = Px \text{ per ogni } x \in X.$$

Che cosa giustifica questo nome? $\lim_{t\to+\infty} e^{-\lambda_0 t}T_t x = Px$ significa che

$$T_t x \sim e^{\lambda_0} t P x \text{ per } t \sim +\infty$$

In termini di un problema di Cauchy, x è il dato iniziale, e $T_t x$ è la soluzione relativa al dato iniziale x al tempo t. Si vede come il comportamento asintotico delle soluzioni sia di tipo esponenziale, essendo $e^{\lambda_0 t} \in \mathbb{R}$ e Px una costante in X, nel senso che non dipende dal tempo t.

Definizione 2.2 (parametro di Malthus) *Il valore reale λ_0 esprime la crescita della soluzione, nel caso di un modello di popolazione si chiama parametro di Malthus.*

2.2 L'enunciato del teorema

Teorema 2.3 *Sia $(T_t)_{t\geq 0}$ un semigruppo di operatori fortemente continuo, positivo, definitivamente compatto ed irriducibile.*
Allora $(T_t)_{t\geq 0}$ possiede la proprietà di crescita esponenziale asincrona.

2.3 Dimostrazione del teorema

La dimostrazione del teorema viene spezzata in due parti. Si dimostrerà sostanzialmente che la possibilità di isolare un autovalore strettamente dominante "ben lontano" da tutti gli altri conduce alla crescita esponenziale asincrona, e che il teorema fondamentale che è stato enunciato fornisce delle condizioni sufficientia a tal fine.

2.3.1 Dimostrazione del teorema nella forma debole

Teorema 2.4 *Sia (T_t) un semigruppo di operatori fortemente continuo, sia A il suo generatore infinitesimale e valgano*

1. *λ_0 autovalore di A avente molteplicità algebrica uguale a uno, reale, strettamente dominante*
2. *$\omega_{ess}(A) < \omega_0(A)$.*

Allora il semigruppo possiede la proprietà di crescita esponenziale asincrona.

Dimostrazione.

- $\lambda_0 \in \sigma(A) \backslash \sigma_{ess}(A)$.

Essendo un autovalore, λ_0 è un elemento dello spettro. Inoltre è ovvio che

$$s(A) = \sup\{Re\lambda, \lambda \in \sigma(A)\} = \lambda_0$$

a causa della realtà e della stretta dominanza di λ_0.
Dalla proposizione 1.47

$$\omega_0(A) = \max\{s(A), \omega_{ess}(A)\} = s(A)$$

poiché $\omega_{ess} < \omega_0$ per ipotesi. Quindi

$$\lambda_0 = s(A) = \omega_0(A).$$

Ora, se λ_0 appartenesse allo spettro essenziale di A

$$\lambda_0 \leq \sup\{Re\lambda, \lambda \in \sigma_{ess}(A)\} \leq \omega_{ess}(A) < \omega_0(A) = \lambda_0$$

(dove la prima diseguaglianza segue dalla proposizione 1.47), il che è chiaramente un assurdo.

- λ_0 è un polo del risolvente $R[\lambda, A]$.

Segue dalla proposizione 1.55.

- $X = ker[\lambda_0 - A] \oplus Im[\lambda_0 - A]$

A è chiuso perché è il generatore di un semigruppo fortemente continuo (1.54). Dal teorema 1.52, ponendo $p = 1$ perché λ_0 è un polo di ordine uno (poli di molteplicità algebrica uno e poli di ordine uno sono la stessa cosa, come prova la proposizione 1.53), si ottiene la decomposizione.

Sia ora P la proiezione su $ker[\lambda_0 - A]$, e si definisca

$$\tilde{T}_t = T_t[I - P]$$

$\tilde{T}_t$ risulta la restrizione di T_t a $Im[\lambda_0 - A]$.
$(\tilde{T}_t)_{t\geq 0}$ è su semigruppo fortemente continuo su $Im[\lambda_0 - A]$; sia $\tilde{A}$ il so generatore infinitesimale, $\tilde{A}$ risulta la restrizione di A a $Im[\lambda_0 - A]$ (insomma il generatore della restrizione è la restrizione del generatore).
Lo spettro di $\tilde{A}$ è $\sigma(\tilde{A}) = \sigma(A)\setminus\{\lambda_0\}$, in virtú del teorema 1.52.

- $\omega_0(\tilde{A}) \leq \lambda_0 - \delta$ $\exists\delta$ *reale positivo.*

Si userà di nuovo il teorema 1.47

$$\omega_0(\tilde{A}) = \max\{s(\tilde{A}), \omega_{ess}(\tilde{A})\}$$

Si dimostra innanzitutto che

$$Re\lambda \leq \lambda_0 - \delta_1 \ \forall\lambda \in \sigma(A)\setminus\{\lambda_0\}$$

ovvero che λ_0 non è una accumulazione per l'insieme

$$\{Re\lambda; \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Sia per semplicità $\lambda_0 = 0$ e per assurdo esista

$$\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \sigma(A)\setminus\{\lambda_0\}$$

una successione convergente tale che

$$Re\lambda_n \uparrow \lambda_0 = 0$$

Ora, in virtú della proposizione 1.49,

$$\{e^{t\lambda_n}\} \subseteq \sigma(T_t).$$

Un rapido calcolo,

$$e^{t\lambda_n} = e^{t[Re\lambda_n + iIm\lambda_n]} = e^{tRe\lambda_n}e^{tiIm\lambda_n} \longrightarrow 1$$

mostra che lo spettro $\sigma(T_t)$ ha un punto di accumulazione sulla circonferenza complessa di raggio unitario, per cui

$$r_{ess}(T_t) \geq 1$$

Questo, però, in virtú della proposizione 1.50, dà

$$0 \leq r_{ess}(T_t) = e^{t\omega_{ess}(A)}$$

per cui

$$\omega_{ess}(A) \geq 0 = \omega_0(A)$$

il che è contrario alle ipotesi. Si è insomma provato che

$$\delta_1 = dist[\lambda_0, \{Re\lambda; \lambda \in \sigma(A) \setminus \{\lambda_0\}\}] > 0$$

Ovviamente

$$s(\tilde{A}) \leq \lambda_0 - \delta_1$$

Vale inoltre

$$\omega_{ess}(\tilde{A}) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\log \|\tilde{T}_t\|_{ess}}{t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\log \|T_t[I-P]\|_{ess}}{t} \leq$$

$$\leq \lim_{t\to+\infty} \frac{\log \|T_t\|_{ess}}{t} = \omega_{ess}(A) < \omega_0(A)$$

stante che $\|T_t[I-P]x\| \leq \|T_t x\|$.
Si chiami ora δ_2 un numero reale positivo che sia minore o uguale alla distanza fra $\omega_0(A)$ e $\omega_{ess}(A)$.
Per

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

vale sia

$$s(\tilde{A}) \leq \lambda_0 - \delta$$

sia

$$\omega_{ess}(\tilde{A}) \leq \lambda_0 - \delta$$

Dalla proposizione 1.47 si ha

$$\omega_0(\tilde{A}) \leq \lambda_0 - \delta.$$

- $\exists \eta > 0 \ t.c. \ \|e^{-\lambda_0 t}T_t x - Px\| \leq Me^{-\eta t}\|x\| \ \exists M \geq 1$

Dalla proposizione 1.42,

$$\forall \omega > \omega_0(\tilde{A}), \|\tilde{T}_t\tilde{x}\| \leq \tilde{M}e^{\omega t}\|\tilde{x}\| \ \exists \tilde{M} \geq 1, \forall \tilde{x} \in Im[\lambda_0 - A].$$

In particolare,

$$\forall \omega \in]\lambda_0 - \delta, \lambda_0[, \|\tilde{T}_t\tilde{x}\| \leq \tilde{M}e^{\omega t}\|\tilde{x}\|$$

altrimenti scritto

$$\forall \eta \in]0, \delta[, \|\tilde{T}_t\tilde{x}\| \leq \tilde{M}e^{t[\lambda_0 - \eta]}\|\tilde{x}\| \ \forall \tilde{x} \in Im[\lambda_0 - A].$$

Per ogni x appartenente a X

$$\|T_t[I-P]x\| = \|\tilde{T}_t[I-P]x\| \leq$$

$$\leq \tilde{M}e^{[\lambda_0-\eta]t}\|[I-P]x\| \leq \tilde{M}\|I-P\|e^{[\lambda_0-\eta]t}\|x\| = Me^{[\lambda_0-\eta]t}\|x\|.$$

Ora, A e P commutano perché $ker[\lambda_0 - A]$ e $Im[\lambda_0 - A]$ sono A-invarianti, $APx = A\lambda_0 x$ perché $Px \in ker[\lambda_0 - A]$, $A\lambda_0 x = \lambda_0 Ax$ per linearità di A. Perciò $T_t Px = e^{\lambda_0 t}x$.

$$T_t x = T_t[Px + (I-P)x] = e^{\lambda_0 t}Px + T_t[I-P]x$$

Moltiplicando per $e^{-\lambda_0 t}$, spostando un termine e passando alle norme

$$\|e^{-\lambda_0 t}T_t x - Px\| = \|e^{-\lambda_0 t}T_t[I-P]x\| \leq e^{-\lambda_0 t}Me^{[\lambda_0-\eta]}\|x\| \leq$$

$$\leq Me^{-\eta t}\|x\|$$

maggiorazione che comporta il risultato; la quantità $e^{-\eta t}$ tende a zero al tendere di t a $+\infty$ (η è positivo), per cui

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-\lambda_0 t}T_t x = Px.$$

2.3.2 Dimostrazone del teorema nella forma forte

La dimostrazione del teorema fondamentale sulla crescita esponenziale asincrona viene effettuata in questo modo: si mostrerà che sotto le ipotesi di forte continuità, positività, irriducibilità e definitiva compattezza si ricade nelle ipotesi del teorema 2.4.

Innanzitutto se lo spettro di A non è vuoto $s(A) > -\infty$.

- $\omega_{ess}(A) = -\infty$.

$$\omega_{ess}(A) = \inf_{t>0} \frac{\log\|T_t\|_{ess}}{t} = -\infty$$

poiché (T_t) è compatto per $t \geq \bar{t}$.

Dalla proposizione 1.47

$$\sup\{Re\lambda \; t.c. \; \lambda \in \sigma_{ess}(A)\} \leq \omega_{ess}(A) = -\infty$$

ovvero lo spettro essenziale è vuoto, quindi i punti dello spettro sono tutti poli del risolvente $R[\lambda, A]$, vedi la poprosizione 1.55.

- $s(A)$ è un polo di ordine uno (o di molteplicità algebrica uno)

Segue, grazie anche alla forte continuità, alla positività e alla irriducibilità del semigruppo (T_t) dal teorema 1.51.

- $\omega_{ess}(A) < \omega_0(A)$

Essendo lo spettro di A non vuoto, con l'ausilio della proposizione 1.47

$$\omega_0(A) = \max\{\omega_{ess}(A), s(A)\} = \max\{-\infty, s(A)\} = s(A) > -\infty$$

- $\sigma_B(A) = \{s(A)\}$

Con ciò $s(A) = \omega_0(A) = \lambda_0$ risulterà l'autovalore reale strettamente dominante.
Lo spettro periferico di un semigruppo positivo è ciclico (teorema 1.48), quindi si può scrivere

$$\sigma_B(A) = \{s(A) + i\nu k, k \in \mathbb{Z}\} \, \exists \nu \geq 0.$$

Si ponga per semplicità $s(A) = 0$.
Si supponga per assurdo che $\nu > 0$. Dalla proposizione 1.49 $e^{t\sigma(A)} \subseteq \sigma(T_t)$, per cui

$$\{e^{i\nu kt}\}_{k\in\mathbb{Z}} \subseteq \sigma(T_t)$$

Per qualche $\xi > 0$ l'insieme $\{e^{i\xi k}\}$ è denso nella circonferenza di raggio unitario del piano complesso. Nel caso in questione, per qualche $t > 0$ l'insieme $\{e^{i\nu kt}\}$ denso in $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Siccome lo spettro è un chiuso (1.46),

$$\{|z| = 1\} \subseteq \sigma(T_t).$$

Tutti i punti della circonferenza sono delle accumulazioni,

$$\{|z| = 1\} \subseteq \sigma_{ess}(A)$$

ma

$$1 \leq r_{ess}(T_t) = e^{t\omega_{ess}(A)} \Rightarrow \omega_{ess}(A) \geq 0$$

che è assurdo.

Sono insomma soddisfatte tutte le ipotesi del teorema 2.4, per cui si può concludere che il semigruppo (T_t) ha la proprietà di crescita esponenziale asincrona.

Capitolo 3

EVOLUZIONE DI UNA POPOLAZIONE DI CELLULE

Il modello che si intende studiare riguarda popolazioni di cellule. Esso è strutturato secondo l'età. La popolazione viene inoltre suddivisa in due sottopopolazioni, a seconda della possibilità o meno che hanno le cellule di riprodursi. Esse si possono trovare in due stati: o sono prolifiche, i.e. possono dividersi generando cosí due cellule figlie, o sono quiescenti, i.e. invecchiano senza potersi dividere.

Si assume che esista un'età massima a_1 oltre la quale le cellule perdono la capacità di dividersi. Da tale età in poi si decide di ignorarle nel computo della popolazione, anche se in effetti esse scompaiono solo per la divisione.

Dalla loro nascita fino all'età a_1 le cellule possono passare da uno stato all'altro in qualunque momento.

Si assume che al momento della nascita le cellule siano prolifiche.[1]

Si va ora a descrivere il modello in termini di un problema di Cauchy sulla semistriscia $(a, t) \in [0, a_1] \times [0, +\infty[$, dove a rappresenta l'età e t il tempo.

3.1 Impostazione discreta

3.1.1 Le grandezze in gioco

Vengono ora introdotte le costanti e le funzioni che servono a costruire una matrice di Leslie per il modello.

Sia h un numero reale positivo fissato.

[1] È una scelta, si potrebbe imporre anche il contrario. Nel caso piú generale si fissa un numero reale f compreso fra 0 e 1, che descrive quante cellule nascono prolifiche. Ciò verrà trattato in un apposito paragrafo.

L'età massima a_1 è già stata fissata. Sia ora k il piú piccolo intero tale che $kh \geq a_1$. In questo modo $k = k(h)$, quindi quando si farà variare h varierà anche k, ma ciò resterà sottinteso.

Sia $P_a(t)$ il numero delle cellule prolifiche di età compresa fra $a-h$ e a al tempo t, e $Q_a(t)$ il numero delle cellule quiescenti di età compresa fra $a-h$ e a al tempo t.

Sia $s_a(u)$ la frazione di cellule prolifiche, di età compresa fra $a-h$ e a, che in un intervallo di tempo di lunghezza u passano allo stato di quiescenza, e $t_a(u)$ la frazione di cellule quiescenti, di età compresa fra $a-h$ e a, che in un intervallo di tempo di lunghezza u passano allo stato di prolificità.

Sia $m_a(u)$ la frazione di cellule di età compresa fra $a-h$ e a che si dividono durante un intervallo di tempo di lunghezza u.

Si noti che queste tre funzioni s_a, t_a e m_a non dipendono dall'istante t, i.e. la frazione di cellule che cambiano stato o si dividono dipende solo dalla lunghezza dell'intervallo di tempo che si fa scorrere.[2]

Si è già assunto che le cellule nascono prolifiche. Si assume inoltre che lo restino fino all'età h; questa ipotesi potrebbe apparire restrittiva, tuttavia è necessaria per poter impostare il modello in questo modo, ed è in realtà tanto meno pesante quanto piú piccolo è h.

Si assumerà l'esistenza di altre funzioni man mano che se ne presenta la necessità.

3.1.2 La matrice di Leslie

Si scrive ora una matrice di Leslie per il modello voluto:

$$\begin{pmatrix} P_h(t+h) \\ P_{2h}(t+h) \\ \vdots \\ P_{kh}(t+h) \\ \hline Q_h(t+h) \\ Q_{2h}(t+h) \\ \vdots \\ Q_{kh}(t+h) \end{pmatrix} = \mathrm{L} \begin{pmatrix} P_h(t) \\ P_{2h}(t) \\ \vdots \\ P_{kh}(t) \\ \hline Q_h(t) \\ Q_{2h}(t) \\ \vdots \\ Q_{kh}(t) \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

dove L è la matrice a blocchi

$$L = \left(\begin{array}{c|c} L_1 & L_2 \\ \hline L_3 & L_4 \end{array} \right).$$

[2]Anche questa è una posizione, si potrebbe decidere di renderle dipendenti dal tempo t; ciò renderebbe il modello piú complicato. È una sua possibile generalizzazione.

I blocchi sono i seguenti:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 2m_h(h) & 2m_{2h}(h) & \cdots & \cdots & 2m_{kh}(h) \\ 1 - m_h(h) - s_h(h) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 - m_{2h}(h) - s_{2h}(h) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - m_{(k-1)h}(h) - s_{(k-1)h}(h) & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ t_h(h) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_{2h} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{(k-1)h}(h) & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ s_h(h) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_{2h}(h) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{(k-1)h}(h) & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 - t_h(h) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 - t_{2h}(h) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a - t_{(k-1)h}(h) & 0 \end{pmatrix}.$$

Una volta analizzato il significato della matrice L, il passaggio al continuo si ottiene per $h \to 0^+$, andando cioè a raffinare sempre di piú la suddivisione che si fa della popolazione secondo le fasce d'età.

3.1.3 Costruzione della matrice di Leslie

A partire dai dati sulla popolazione al tempo t, si vuole "censire" la popolazione al tempo $t + h$, i.e. dopo che è trascorso un tempo pari al valore fissato h.

Un ragionamento di massima: se una cellula, al tempo t, aveva età compresa fra $(i-1)h$ e ih, al tempo $t + h$ avrà un'età fra ih e $(i+1)h$.
Le cellule che (al tempo t) avevano età compresa fra 0 e kh avranno (al tempo $t - h$) età fra h e kh, perché quelle che avevano età fra $(k-1)h$ e kh verranno ignorate in quanto superano a_1.
Resta da determinare: quali cellule avranno età fra 0 e h? Saranno il solo frutto delle divisioni di cellule prolifiche, in quanto la intera popolazione dell'istante t si troverà fuori di questa fascia d'età.

Si cominci ora con lo stabilire quante cellule prolifiche abbiano età compresa fra 0 e h. Esse saranno la totalità delle neonate, per le assunzioni

precedentemente fatte.
Ciò condurrà alla scrittura della prima riga della matrice L.
Le $P_h(t)$ generano, durante il tempo h, $2m_h(h)P_h(t)$ figlie, dove il 2 sta a significare che una cellula si divide in due figlie.
Le $P_{2h}(t)$ generano, nel tempo h, $2m_{2h}(h)P_{2h}(t)$ figlie, e cosí via, fino alle $P_{kh}(t)$ che generano, nel tempo h, $2m_{kh}(h)P_{kh}(t)$ figlie.
Insomma, le neonate durante il tempo h sono

$$\begin{aligned} P_h(t+h) &= 2m_h(h)P_h(t) + 2m_{2h}(h)P_{2h}(t) + \dots + 2m_{kh}(h)P_{kh}(t) = \\ &= 2\sum_{j=1}^{k} m_{jh}(h)P_{jh}(t). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Si va ora a calcolare quante cellule prolifiche abbiano al tempo $t+h$ età compresa fra h e $2h$. Esse saranno le $P_h(t)$, meno le cellule che nel tempo h si dividono, meno quelle che diventano quiescenti, piú le $Q_h(t)$ che diventano prolifiche.

$$\begin{aligned} P_{2h}(t+h) &= P_h(t) - m_h(h)P_h(t) - s_h(h)P_h(t) + t_h(h)Q_h(t) = \\ &= [1 - m_h(h) - s_h(h)]\, P_h(t) + t_h(h)Q_h(t). \end{aligned}$$

Idem per le $P_{3h}(t+h) = [1 - m_{2h}(h) - s_{2h}(h)]\, P_{2h}(t) + t_{2h}(h)Q_{2h}(t)$; le P_{4h}, etc., fino alle $P_{kh}(t+h)$.

$$P_{ih}(t+h) = \left[1 - m_{(i-1)h}(h) - s_{(i-1)h}\right] P_{(i-1)h}(t) + t_{(i-1)h}(h)Q_{(i-1)h}(t) \tag{3.3}$$

$$\text{per } i = 2, 3, \dots, k.$$

Si è cosí esaurito il computo della sottopopolazione di cellule prolifiche. Ora tocca alle quiescenti.
Non sono presenti cellule quiescenti di età compresa fra 0 e h perché si è detto che le cellule nascono prolifiche.[3]
Quante sono le $Q_{2h}(t+h)$? Ci sono le $Q_h(t)$, meno quelle che nel tempo h diventano prolifiche, piú le $P_h(t)$ che diventano quiescenti.

$$\begin{aligned} Q_{2h}(t+h) &= Q_h(t) - t_h(h)Q_h(t) + s_h(h)P_h(t) = \\ &= [1 - t_h(h)]\, Q_h(t) + s_h(h)P_h(t) \end{aligned}$$

e cosí per le $Q_{3h}(t+h)$, etc., fino alle $Q_{kh}(t+h)$.

$$Q_{ih}(t+h) = 1 - t_{(i-1)h}(h)Q_{(i-1)h}(t) + s_{(i-1)h}(h)P_{(i-1)h}(t) \tag{3.4}$$

$$\text{per } i = 2, 3, \dots k.$$

Scrivendo le 3.2, 3.3, 3.4 con l'ausilio delle matrici si ottiene la scrittura della 3.1.

[3] In realtà ci sono quelle che imponiamo come dati al tempo iniziale, il che dà un senso alla scrittura $Q_h(t)$, che altrimenti sarebbe equivalente a 0.

3.1.4 Passaggio al limite

In questa sezione si intendono sviluppare i calcoli per effettuare il passaggio al limite, $h \to 0^-$.

La 3.3 si può riscrivere cosí:

$$P_{a+h}(t+h) = [1 - m_a(h) - s_a(h)]P_a(t) + t_a(h)Q_a(t)$$

$$\text{per } a = h, 2h, ..., (k-1)h.$$

Sottraendo $P_a(t)$ ad ambo i membri

$$P_{a-h}(t+h) - P_a(t) = -m_a(h)P_a(t) - s_a(h)P_a(t) + t_a(h)Q_a(t)$$

dalla quale, dividendo per h

$$\frac{P_{a-h}(t+h) - P_a(t)}{h} = -\frac{m_a(h)}{h}P_a(t) - \frac{s_a(h)}{h}P_a(t) + \frac{t_a(h)}{h}Q_a(h). \quad (3.5)$$

Si assume ora che esistano delle densità (rispetto all'età) di popolazione $p(a,t)$ e $q(a,t)$, le quali dicono quante cellule (rispettivamente prolifiche e quiescenti) abbiano età compresa fra a e $a + da$. In questo modo, il numero di cellule prolifiche che hanno età compresa fra a e a' all'istante t è $\int_a^{a'} p(\xi,t)d\xi$. Idem per le quiescenti.
Quanto alla loro regolarità, si suppone che appartengano a $\mathcal{C}^2([0,a_1])$ rispetto alla variabile a, nel senso che per ogni $t \in [0,+\infty[$ si ha che $p(\cdot,t)$ appartiene a $\mathcal{C}^2$.

Da ciò si può scrivere

$$P_a(t) = \int_{a-h}^{a} p(\xi,t)d\xi \quad (3.6)$$

$$Q_a(t) = \int_{a-h}^{a} q(\xi,t)d\xi. \quad (3.7)$$

Usando la 3.6 e la 3.7 nella 3.5

$$\frac{1}{h}\left\{\int_a^{a+h} p(\xi,t+h)d\xi - \int_{a-h}^{a} p(\xi,t)d\xi\right\} =$$

$$= -\frac{m_a(h)}{h}\int_{a-h}^{a} p(\xi,t)d\xi - \frac{s_a(h)}{h}\int_{a-h}^{a} p(\xi,t)d\xi + \frac{t_a(h)}{h}\int_{a-h}^{a} q(\xi,t)d\xi.$$

Effettuando il cambio di variabile

$$\int_a^{a+h} p(\xi,t-h)d\xi = \int_{a-h}^{a} p(\xi+h,t+h)d\xi$$

si ha

$$\frac{1}{h}\left\{\int_a^{a+h} p(\xi,t+h)d\xi - \int_{a-h}^{a} p(\xi,t)d\xi\right\} = \frac{1}{h}\int_{a-h}^{a}[p(\xi+h,t+h)-p(\xi,t)]d\xi$$

Dividendo novamente per h

$$\frac{1}{h^2}\int_{a-h}^{a}[p(\xi+h,t+h)-p(\xi,t)d\xi] = -\frac{m_a(h)}{h}\frac{1}{h}\int_{a-h}^{a}p(\xi,t)d\xi -$$
$$-\frac{s_a(h)}{h}\frac{1}{h}\int_{a-h}^{a}p(\xi,t)d\xi + \frac{t_a(h)}{h}\frac{1}{h}\int_{a-h}^{a}q(\xi,t)d\xi. \tag{3.8}$$

Ora si intende passare ai limiti, per $h \to 0^+$.

Si assume che

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{m_a(h)}{h} = \mu(a) \tag{3.9}$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{s_a(h)}{h} = \sigma(a) \tag{3.10}$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{t_a(h)}{h} = \tau(a). \tag{3.11}$$

Quanto alla loro regolarità, si suppone che esse siano essenzialmente limitate sull'intervallo $[0, a_1]$ e che non siano identicamente nulle.

Il passaggio al limite per il primo membro della 3.8 richiede un po' di accortezza.

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h^2}\int_{a-h}^{a}[p(\xi+h,t+h)-p(\xi,t)]d\xi =$$
$$= \lim_{h\to 0^+}\frac{\int_{a-h}^{a}[p(\xi+h,t+h)-p(\xi,t)]d\xi}{h^2} =$$
$$\overset{(H)}{=} \lim_{h\to 0^+}\frac{p(a,t+h)-p(a-h,t)+\int_{a-h}^{a}[\frac{\partial p}{\partial a}(\xi+h,t+h)+\frac{\partial p}{\partial t}(\xi+h,t+h)]d\xi}{2h} =$$
$$= \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{2}\left[\frac{p(a,t+h)-p(a-h,t)}{h}\right] +$$
$$+ \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{2}\times\frac{1}{h}\int_{a-h}^{a}\left[\frac{\partial p}{\partial a}(\xi+h,t+h)+\frac{\partial p}{\partial t}(\xi+h,t+h)\right]d\xi =$$
$$\overset{(H)}{=} \frac{1}{2}\lim_{h\to 0^+}\left[\frac{\partial p}{\partial t}(a,t+h)+\frac{\partial p}{\partial a}(a-h,t)\right] +$$
$$+\frac{1}{2}\lim_{h\to 0^+}\left\{\frac{\partial p}{\partial a}(a,t+h)+\frac{\partial p}{\partial t}(a,t+h)+\right.$$
$$+\int_{a-h}^{a}\left[\frac{\partial^2 p}{\partial a^2}(\xi+h,t+h)+\frac{\partial^2 p}{\partial t\partial a}(\xi+h,t+h)+\right.$$

$$+\frac{\partial^2 p}{\partial a \partial t}(\xi+h,t+h) - \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(\xi+h,t+h)\Bigg] d\xi \Bigg\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial p}{\partial a}(a,t) + \frac{\partial p}{\partial t}(a,t)\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial p}{\partial a}(a,t) + \frac{\partial p}{\partial t}(a,t)\right] =$$

$$= \frac{\partial p}{\partial a}(a,t) + \frac{\partial p}{\partial t}(a,t).$$

Per il membro di destra, essendo il limite di un prodotto uguale al prodotto dei limiti, se essi esistono finiti, risulta

$$\lim_{h\to 0^+}\left[\frac{m_a(h)}{h} \times \frac{1}{h}\int_{a-h}^{a} p(\xi,t)d\xi\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0^+}\left[\frac{m_a(h)}{h}\right] \times \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_{a-h}^{a} p(\xi,t)d\xi =$$

$$= \mu(a) \times p(a,t)$$

per la 3.9 e la continuità di p.

Allo stesso modo, per la continuità di p e le 3.10 e 3.11,

$$\lim_{h\to 0^+}\left[\frac{s_a(h)}{h} \times \frac{1}{h}\int_{a-h}^{a} p(\xi,t)d\xi\right] = \sigma(a)p(a,t)$$

e

$$\lim_{h\to 0^+}\left[\frac{t_a(h)}{h} \times \frac{1}{h}\int_{a-h}^{a} q(\xi,t)d\xi\right] = \tau(a)q(a,t).$$

In definitiva si ricava

$$\frac{\partial p}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial t} = -\mu p - \sigma p + \tau q \tag{3.12}$$

che è una delle equazioni del problema di Cauchy.

Si va ora ad ottenere le condizioni per $a = 0$.

Dalla prima riga della matrice di Leslie si ha

$$P_h(t+h) = \sum_{j=1}^{m} 2m_{jh}(h)P_{jh}(t).$$

Dividendo per h

$$\frac{1}{h}P_h(t+h) = 2\sum_{j=1}^{m}\frac{m_{jh}(h)}{h}P_{jh}(t)$$

e usando la 3.6

$$\frac{1}{h}\int_0^h p(\xi,t+h)d\xi = 2\sum_{j=1}^{k}\frac{m_{jh}(h)}{h}\int_{(j-1)h}^{jh} p(\xi,t)d\xi. \tag{3.13}$$

Si calcola il limite del membro di sinistra della 3.13:

$$\lim_{h\to 0^+}\left[\frac{1}{h}\int_0^h p(\xi,t-h)d\xi\right]=p(0,t)$$

per la continuità di p.

Ora il passaggio al limite per il membro di destra della 3.13 è un po' piú delicato:

$$\lim_{h\to 0^+}\left[\sum_{j=1}^{k}\frac{m_{jh}(h)}{h}\int_{(j-1)h}^{jh}p(\xi,t)d\xi\right].$$

Siccome $\lim_{h\to 0^+} m_{jh}(h)=0$, per il teorema di Lagrange [4] si può scrivere

$$\frac{m_{jh}(h)}{h}=\mu(\xi_j)$$

per qualche ξ_j appartenente all'intervallo $](j-1)h, jh[$.

Per il teorema della media

$$\int_{(j-1)h}^{jh}p(\xi,t)d\xi=h\times p(\overline{\xi_j},t)$$

per qualche $\overline{\xi_j}$ appartenente a $[(j-1)h, jh]$.

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{m_{jh}(h)}{h}\int_{(j-1)h}^{jh}p(\xi,t)d\xi=\sum_{j=1}^{k}h\mu(\xi_j)p(\overline{\xi_j},t)$$

per qualche ξ_j e qualche $\overline{\xi_j}$ appartenenti a $[(j-1)h, jh]$.

Facendo tendere h a zero, i.e. schiacciando gli intervallini $[(j-1)h, jh]$, si cade nella definizione di integrale alla Riemann,

$$\lim_{h\to 0^+}\left[\sum_{j=1}^{k}h\mu(\xi_j)p(\overline{\xi_j},t)\right]=\int_0^{a_1}\mu(\xi)p(\xi,t)d\xi.$$

Quindi,

$$p(0,t)=2\int_0^{a_1}\mu(\xi)p(\xi,t)d\xi. \tag{3.14}$$

Calcoli analoghi si possono fare per le

$$Q_{a+h}(t-h)$$

$$\text{per } a=0,h,2h,...,(k-1)h$$

[4] Se f è continua sull'intervallo $[a,b]$ e derivabile su $]a,b[$, allora $f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)$ per qualche $\xi\in]a,b[$.

ottenendo cosí

$$\frac{\partial q}{\partial a} + \frac{\partial q}{\partial t} = \sigma p - \tau q \tag{3.15}$$

e

$$q(0,t) = 0. \tag{3.16}$$

Mettendo insieme le 3.12, 3.15, le condizioni al contorno 3.14, 3.16, e aggiungendo le condizioni al contorno per $t = 0$, il nostro modello è quindi descritto da questo sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial t} = -\mu p - \sigma p + \tau q \\ \frac{\partial q}{\partial a} + \frac{\partial q}{\partial t} = \sigma p - \tau q \\ p(0,t) = 2\int_0^{a_1} \mu(\xi) p(\xi,t) d\xi \\ q(0,t) = 0 \\ p(a,0) = p_0(a) \\ q(a,0) = q_0(a) \end{cases} \tag{3.17}$$

3.1.5 Una generalizzazione del modello

Per costruire questo modello si è imposto che le cellule nascano prolifiche. Una prima generalizzazione si ottiene permettendo che parte nascano prolifiche, parte quiescenti. Sia f il numero reale, compreso fra 0 e 1, che esprime la frazione di neonate che sono prolifiche.

I calcoli sono del tutto sono analoghi a quelli già svolti. La matrice di Leslie sarà

$$L = \left(\begin{array}{c|c} L_1 & L_2 \\ \hline L_3 & L_4 \end{array} \right)$$

I blocchi sono i seguenti:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 2fm_h(h) & 2fm_{2h}(h) & \cdots & \cdots & 2fm_{kh}(h) \\ 1 - m_h(h) - s_h(h) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 - m_{2h}(h) - s_{2h}(h) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - m_{(k-1)h}(h) - s_{(k-1)h}(h) & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ t_h(h) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_{2h} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{(k-1)h}(h) & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 2(1-f)m_h(h) & 2(1-f)m_{2h}(h) & \cdots & \cdots & 2(1-f)m_{kh}(h) \\ s_h(h) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_{2h}(h) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{(k-1)h}(h) & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1-t_h(h) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-t_{2h}(h) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t_{(k-1)h}(h) & 0 \end{pmatrix}$$

e il sistema di equazioni differenziali relativo a questo problema sarà

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial t} = -\mu p - \sigma p + \tau q \\ \frac{\partial q}{\partial a} + \frac{\partial q}{\partial t} = \sigma p - \tau q \\ p(0,t) = 2f \int_0^{a_1} \mu(\xi) p(\xi,t) d\xi \\ q(0,t) = 2(1-f) \int_0^{a_1} \mu(\xi) p(\xi,t) d\xi \\ p(a,0) = p_0(a) \\ q(a,0) = q_0(a) \end{cases} \tag{3.18}$$

3.2 Impostazione continua

Un altro approccio possibile alla costruzione del modello è quello direttamente continuo.

3.2.1 Le grandezze in gioco

Si comincia col supporre che esistano due funzioni $p(a,t)$ e $q(a,t)$ che sono le densità (rispetto all'età) di popolazione (prolifica e quiescente) all'istante t.

$p(a,t)$ sono le cellule che all'istante t sono prolifiche e hanno età compresa fra a e $a+da$, in modo che il numero di cellule prolifiche che al tempo t hanno età compresa fra a e a' sia

$$\int_a^{a'} p(\alpha,t) d\alpha$$

Idem per $q(a,t)$.

Si suppone che $\mu(a)$ sia il tasso di divisione delle cellule prolifiche di età a. Ovverossia, $\mu(a)p(a,t)$ significa quante cellule di età compresa fra a e $a+da$ si dividono nel tempo $[t, t+dt]$.

Analogamente si introducono $\sigma(a)$, che è il tasso di passaggio dalla prolificità alla quiescenza, e $\tau(a)$, che è il tasso di passaggio dalla quiescenza alla prolificità.

È il caso di chiarire meglio come si usa $\mu(a)$.
È evidente, per come è stata introdotta questa grandezza, che per ottenere un valore finito bisognerà integrare μp su una superficie in

$$(a, t) \in [0, a_1] \times [0, +\infty[\subseteq \mathbb{R}^2$$

i.e. usare un integrale doppio, rispetto a tempo ed età.

In che modo?

La scrittura

$$\int_a^{\tilde{a}} \mu(\alpha)p(\alpha, t)d\alpha$$

che cosa esprime?

È il numero di divisioni delle cellule di età compresa fra a e $\tilde{a}$ nel tempo $[t, t + dt]$.
Integrando cosí

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_a^{\tilde{a}} \mu(\alpha)p(\alpha, \tau)d\alpha d\tau$$

che cosa si ottiene?
Il numero di divisioni nell'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ delle cellule che hanno età $[a, \tilde{a}]$, nel senso delle cellule che stanno in quella fascia d'età nonostante lo scorrere del tempo. Nel senso che non si segue un gruppo di cellule e la loro evoluzione, ma l'evoluzione di una certa fascia d'età.

Volendo sapere il numero di divisioni, nel tempo $[t, t+u]$ delle cellule che all'istante t hanno un'età compresa fra a e $\tilde{a}$, bisognerà modificare l'integrale in modo da seguire questo gruppo di cellule nel loro invecchiamento dovuto allo scorrere del tempo. Se all'istante t le cellule sono nella fascia d'età $[a, \tilde{a}]$, all'istante $t + \delta$ saranno nella fascia $[a + \delta, \tilde{a} + \delta]$.

$$\int_{\tau=t}^{\tau=t+u} \int_{\alpha=a+\tau-t}^{\alpha=\tilde{a}+\tau-t} \mu(\alpha)p(\alpha, \tau)d\alpha d\tau$$

cambiando variabile di integrazione

$$\int_{\sigma=0}^{\sigma=u} \int_{\alpha=a+\sigma}^{\alpha=\tilde{a}+\sigma} \mu(\alpha)p(\alpha, t + \sigma)d\alpha d\sigma$$

Ancora, il numero di tutte le divisioni nell'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ è

$$\int_{\tau=t_1}^{\tau=t_2} \int_{\alpha=0}^{\alpha=a_1} \mu(\alpha)p(\alpha, \tau)d\alpha d\tau$$

oppure, cambiando variabile, se $u = t_2 - t_1$,

$$\int_{\sigma=0}^{\sigma=u} \int_{\alpha=0}^{\alpha=a_1} \mu(\alpha)p(\alpha, t + \sigma)d\alpha d\sigma$$

3.2.2 Derivazione del problema differenziale

Si pone
$$P(a,t)=\int_0^a p(\alpha,t)d\alpha$$
i.e. $P(a,t)$ è il numero di cellule prolifiche che all'istante t hanno età minore o uguale ad a.
Si pone anche $Q(a,t)=\int_0^a q(\alpha,t)d\alpha$.

Si vuole calcolare, per h reale positivo, $P(a+h,t+h)$.
Quante sono le cellule prolifiche, di età non superiore a $a+h$ all'istante $t+h$? Saranno le $P(a,t)$, meno quelle che diventano quiescenti durante il tempo h, piú le quiescenti che diventano prolifiche, meno le prolifiche che si dividono, piú le neonate (visto che le cellule nascono prolifiche).

$$\begin{aligned}
P(a+h,t+h) &= P(a,t)-\int_{\xi=0}^{\xi=h}\int_{\alpha=0}^{\alpha=a+\xi}\sigma(\alpha)p(\alpha,t+\xi)d\alpha d\xi+\\
&+\int_{\xi=0}^{\xi=h}\int_{\alpha=0}^{\alpha=a+\xi}\tau(\alpha)q(\alpha,t+\xi)d\alpha d\xi-\\
&-\int_{\xi=0}^{\xi=h}\int_{\alpha=0}^{\alpha=a-\xi}\mu(\alpha)p(\alpha,t+\xi)d\alpha d\xi+\\
&+2\int_{\xi=0}^{\xi=h}\int_{\alpha=0}^{\alpha=a_1}\mu(\alpha)p(\alpha,t+\xi)d\alpha d\xi
\end{aligned}$$

Riscrivendo
$$\begin{aligned}
\int_0^{a+h}p(\alpha,t+h)d\alpha &= \int_0^a p(\alpha,t)d\alpha-\\
&-\int_{\xi=0}^{\xi=h}\int_{\alpha=0}^{\alpha=a+\xi}\sigma(\alpha)p(\alpha,t+\xi)d\alpha d\xi+\\
&+\int_{\xi=0}^{\xi=h}\int_{\alpha=0}^{\alpha=a+\xi}\tau(\alpha)q(\alpha,t+\xi)d\alpha d\xi-\\
&-\int_{\xi=0}^{\xi=h}\int_{\alpha=0}^{\alpha=a-\xi}\mu(\alpha)p(\alpha,t+\xi)d\alpha d\xi+\\
&+2\int_{\xi=0}^{\xi=h}\int_{\alpha=0}^{\alpha=a_1}\mu(\alpha)p(\alpha,t+\xi)d\alpha d\xi
\end{aligned}$$

Calcolando ora per ambo i membri $\frac{d}{dh}$, i.e. derivando rispetto al parametro h, si ottiene
$$p(a+h,t+h)+\int_0^{a+h}\frac{\partial p}{\partial t}(\alpha,t+h)d\alpha=-\int_0^{a+h}\sigma(\alpha)p(\alpha,t+h)d\alpha+$$
$$+\int_0^{a+h}\tau(\alpha)q(\alpha,t+h)d\alpha-\int_0^{a-h}\mu(\alpha)p(\alpha,t+h)d\alpha+2\int_0^{a_1}\mu(\alpha)p(\alpha,t+h)d\alpha$$

Per $h = 0$ si ha

$$\begin{aligned} p(a,t) + \int_0^a \frac{\partial p}{\partial t}(\alpha,t)d\alpha &= -\int_0^a \sigma(\alpha)p(\alpha,t)d\alpha + \\ &+ \int_0^a \tau(\alpha)q(\alpha,t)d\alpha - \int_0^a \mu(\alpha)p(\alpha,t)d\alpha \\ &+2\int_0^{a_1} \mu(\alpha)p(\alpha,t)d\alpha \end{aligned} \tag{3.19}$$

Ponendo $a = 0$ si ottiene

$$p(0,t) = 2\int_0^{a_1} \mu(\alpha)p(\alpha,t)d\alpha \tag{3.20}$$

che è una delle condizioni al contorno.

Derivando la 3.19 rispetto ad a

$$\frac{\partial p}{\partial a}(a,t) + \frac{\partial p}{\partial t}(a,t) = -\sigma(a)p(a,t) + \tau(a)q(a,t) - \mu(a)p(a,t) \tag{3.21}$$

Si sono cosí ottenute le equazioni

$$\frac{\partial p}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial t} = -\mu p - \sigma p + \tau q$$

e

$$p(0,t) = 2\int_0^{a_1} \mu(\alpha)p(\alpha,t)d\alpha.$$

Analogamente si procede per $q(a,t)$, e si ottiene il problema

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial a}(a,t) + \frac{\partial p}{\partial t}(a,t) = -\mu(a)p(a,t) - \sigma(a)p(a,t) + \tau(a)q(a,t) \\ \frac{\partial q}{\partial a}(a,t) + \frac{\partial q}{\partial t}(a,t) = -\tau(a)q(a,t) + \sigma(a)p(a,t) \\ p(0,t) = 2\int_0^{a_1} \mu(\alpha)p(\alpha,t)d\alpha \\ q(0,t) = 0 \\ p(a,0) = p_0(a) \\ q(a,0) = q_0(a) \end{cases} \tag{3.22}$$

3.3 Alcune considerazioni

Seguendo le due impostazioni possibili si è ottenuto lo stesso modello. È però sicuro che le grandezze in gioco significhino la stessa cosa?

Nella prima sezione si è definito

$$\mu(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{m_a(h)}{h}$$

mentre nella seconda si è definito $\mu(a)$ come una grandezza tale che $\mu(a)p(a,t)$ sia il numero di divisioni di cellule di età compresa fra a e $a + da$ nel tempo $[t, t + dt]$.

È effettivamente la stessa cosa?

3.3.1 Le densità di popolazione

La grandezza $p(a,t)$ ha un solo significato, perché è stata definita nello stesso modo nelle due precedenti sezioni. Inoltre, è immediato verificare che

$$p(a,t) = \lim_{h\to 0^-} \frac{P_a(t)}{h}.$$

Dalla definizione

$$P_a(t) = \int_{a-h}^{a} p(\alpha,t)d\alpha = \int_0^h p(\alpha + a - h, t)d\alpha$$

e dividendo per h

$$\frac{P_a(t)}{h} = \frac{1}{h} \times \int_0^h P(\alpha + a - h, t)d\alpha.$$

Andando a calcolare il limite per h che tende a 0, il membro di destra dà immediatamente

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h} \times \int_0^h P(\alpha + a - h, t)d\alpha = p(a,t)$$

e quindi

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{P_a(t)}{h} = p(a,t). \tag{3.23}$$

Analogamente si procede per $q(a,t)$.

3.3.2 Il tasso di divisione

Si indicheranno con i caratteri sovrassegnati le grandezze relative alla sezione "Impostazione continua", tranne $p(a,t)$ che come si è già detto coincide.

Dalle definizioni date

$$m_a(h)P_a(t) = \int_{\xi=0}^{\xi=h} \int_{\alpha=a-h+\xi}^{\alpha=a+\xi} \overline{\mu}(\alpha)p(\alpha, t+\xi)d\alpha d\xi.$$

Dividendo per h^2 si ha

$$\frac{m_a(h)}{h} \times \frac{P_a(t)}{h} = \frac{\int_{\xi=0}^{\xi=h} \int_{\alpha=a-h+\xi}^{\alpha=a+\xi} \overline{\mu}(\alpha)p(\alpha, t+\xi)d\alpha d\xi}{h^2}$$

e andando ad applicare la regola di De l'Hospital per calcolare il limite per h che tende a 0 al membro di destra si ottiene

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\int_{\alpha-a}^{\alpha=a+h} \overline{\mu}(\alpha)p(\alpha, t+h)d\alpha + \int_{\xi=0}^{\xi=h} \overline{\mu}(a-h+\xi)p(a-h+\xi, t+\xi)d\xi}{2h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\overline{\mu}(a+h)p(a+h,t+h)+\overline{\mu}(a)p(a,t+h)}{2} =$$
$$= \overline{\mu}(a)p(a,t).$$

Siccome si ha che il limite di un prodotto è il prodotto dei limiti, se questi ultimi esistono e sono finiti,

$$\lim_{h\to 0+} \left\{ \frac{m_a(h)}{h} \times \frac{P_a(t)}{h} \right\} = \mu(a) \times p(a,t)$$

da cui si conclude

$$\mu(a)p(a,t) = \overline{\mu}(a)p(a,t)$$

e in definitiva

$$\mu(a) = \overline{\mu}(a)$$

i.e. le due definizioni coincidono.

Analogamente si procede per provare che coincidono anche le definizioni di $\sigma(a)$ e $\tau(a)$.

Capitolo 4

A.E.G. NEL MODELLO

Si applicano i risultati discussi nei capitoli 1 e 2 al modello descritto nei capitoli 3 e 4.

4.1 Impostazione del problema di Cauchy

Si vuole ora riscrivere l'equazione differenziale che descrive il modello in termini di un problema di Cauchy astratto, come visto al punto 1.4.1.

Bisognerà quindi scegliere uno spazio di Banach X ed un operatore A definito su $\mathcal{D}(A) \subseteq X$ adeguati.

Lo spazio X che si sceglie è $X = L^1(0, a_1) \times L^1(0, a_1)$, dotato di norma $\|(p, q)\|_X = \|p\|_{L^1} + \|q\|_{L^1}$; in questo modo X risulta completo, e la sua norma è significativa perché $\int_0^{a_1} p(\alpha, t)d\alpha + \int_0^{a_1} q(\alpha, t)d\alpha$ descrive la popolazione totale al tempo t.

Come si sceglie l'operatore A?
Sappiamo che $\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial a} = -\mu p - \sigma p + \tau q$, da cui si può scrivere

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial a} - \mu p - \sigma p + \tau q$$

e operando analogamente per q si arriva alla scrittura di

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial t} \\ \frac{\partial q}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial p}{\partial a} - \mu p - \sigma p + \tau q \\ -\frac{\partial q}{\partial a} + \sigma p - \tau q \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial a} - \mu - \sigma & \tau \\ \sigma & -\frac{\partial}{\partial a} - \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} =$$

$$= A \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

dove $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \longrightarrow X$ è l'operatore lineare definito cosí:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial a} - \mu - \sigma & \tau \\ \sigma & -\frac{\partial}{\partial a} - \tau \end{pmatrix}.$$

Qual è il suo dominio $\mathcal{D}(A)$?
Si può subito dire che

$$\mathcal{D}(A) \subseteq \left\{ (\phi, \psi) \in X : \phi(0) = 2\int_0^{a_1} \mu(\xi)\phi(\xi)d\xi, \psi(0) = 0 \right\} \subseteq X$$

in modo da tener conto delle condizioni al contorno.
Bisogna chiaramente che $(p,q)^{'}$ appartenga a X, e questo vale se le si prende in $W^{1,1}(0,a_1) \times W^{1,1}(0,a_1)$. Da ciò anche $|\mu p| \leq \|\mu\|_\infty p \in L^1(0,a_1)$, e cosí per gli altri addendi; in questo essi tutti appartengono a $L^1(0,a_1)$ e perciò anche la loro somma.

Insomma, il problema di Cauchy astratto è il seguente:

$$X = (L^1(0,a_1) \times L^1(0,a_1), \|(p,q)\|_X = \|p\|_{L^1} + \|q\|_{L^1})$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial a} - \mu - \sigma & \tau \\ \sigma & -\frac{\partial}{\partial a} - \tau \end{pmatrix}$$

$$D(A) = \left\{ (\phi, \psi) \in W^{1,1}(0,a_1) \times W^{1,1}(0,a_1) : \right.$$

$$\left. \phi(0) = 2\int_0^{a_1} \phi(\xi)\mu(\xi)d\xi, \psi(0) = 0 \right\} \subseteq X$$

$$\begin{cases} (p,q)^{'} = A(p,q) \\ (p,q)(t=0) = (p_0,q_0) \end{cases}$$

Scriverne una soluzione significa trovare un'applicazione

$$[0,+\infty[\longrightarrow X$$

$$t \longrightarrow (p,q)(t)$$

che sia continua per $t \geq 0$, differenziabile per $t > 0$, $(p,q)(t) \in \mathcal{D}(A)$ *per* $t > 0$ e tale che risolva il problema.

4.2 Forte continuità del semigruppo

La soluzione del problema di Cauchy 3.22 è

$$\begin{pmatrix} p(\cdot,t) \\ q(\cdot,t) \end{pmatrix} = T_t \begin{pmatrix} p_0(\cdot) \\ q_0(\cdot) \end{pmatrix}$$

Dimostrare esistenza e unicità delle soluzione del problema di Cauchy equivale a dimostrare che l'operatore lineare

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial a} - \mu - \sigma & \tau \\ \sigma & \frac{\partial}{\partial a} - \tau \end{pmatrix}$$

genera un semigruppo fortemente continuo. A tale scopo si utilizza il teorema 1.44:

1. A è un operatore chiuso
2. il dominio di A è denso in X
3. $\exists \omega \in \mathbb{R}$ $t.c.$ $\forall \lambda > \omega, \lambda \in \rho(A)$ e $\|(A-\lambda)\| \leq \frac{1}{(\lambda-\omega)}$.

È utile utilizzare il teorema 1.45 scomponendo l'operatore A in questo modo:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial a} - \mu - \sigma & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial a} - \tau \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \tau \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} = A_0 + B$$

A_0 genera un semigruppo fortemente continuo?

Va dimostrato che gli operatori A e A_0 sono chiusi. Per ottenere ciò è sufficiente provare che l'operatore $Lf = -f'$ è chiuso, essendo che la somma di operatori chiusi con operatori limitati dà operatori chiusi.
Si ricorda che la norma di $W^{1,1}(I)$ è

$$\|f\|_{W^{1,1}(I)} = \|f\|_{L^1(I)} + \|f'\|_{L^1(I)}.$$

Ora,

$$D(L) = \{q \in W^{1,1}(0, a_1); q(0) = 0\} \subseteq L^1(0, a_1)$$
$$L : D(L) \longrightarrow L^1(0, a_1)$$
$$Lf = -f'$$

Si vuol fare vedere che

$$\begin{cases} q_n \xrightarrow{L^1} q \\ Lq_n \xrightarrow{L^1} \tilde{q} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} q \in D(L) \\ \tilde{q} = Lq \end{cases}$$

Come primo punto si mostra che q appartiene a $W^{1,1}$, i.e. che $\exists g \in L^1; \int q\phi' = \int g\phi$.
Per definizione, le q_n stando in $W^{1,1}$, vale

$$\int q_n \phi' = \int q_n' \phi \ \forall \phi \in C_c^1[0, a_1].$$

Da questo, passando ai limiti

$$\int q_n \phi' \longrightarrow \int q\phi'$$

e

$$-\int q_n' \phi \longrightarrow \int \tilde{q}\phi.$$

Per unicità del limite

$$\int q\phi' = \int \tilde{q}\phi$$

il che implica
$$q \in W^{1,1} \text{ e } \tilde{q} = -q'.$$

È ora vero che $q(0) = 0$?
Vale $q_n(0) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Se $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge in norma $\|\cdot\|_{L^1}$ verso q, allora si può estratte una sottosuccessione $(q_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ che converge puntualmente verso q quasi ovunque. In questo caso, sia le q_n sia q sono continue, quindi la convergenza puntuale è ovunque. Si ha allora:

$$\lim_{k\to\infty} q_{n_k}(x) = q(x)$$

per cui, essendo tutte le $q_n(0) = 0$ vale

$$q(0) = \lim_{k\to\infty} q_{n_k}(0) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0.$$

Analogamente si fanno i conti nel caso in cui sia

$$D(L) = \left\{ p \in W^{1,1}(0, a_1); p(0) = 2\int_0^{a_1} \mu(\alpha)p(\alpha)d\alpha \right\}$$

per il quale vale
$$\lim_{n\to\infty} p_n(0) = p(0) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} 2\int_0^{a_1} \mu(\alpha)p_n(\alpha)d\alpha = 2\int_0^{a_1} \mu(\alpha)p(\alpha)d\alpha$$

Lo spazio
$$D = \{f \in W^{1,1}(0, a_1), f(0) = 0\}$$

è denso in $L^1(0, a_1)$ perché vale

$$C_c^\infty(0, a_1) \subseteq D \subseteq L^1(0, a_1)$$

ed il primo è denso nell'ultimo, quindi a maggior ragione lo è D.

Lo spazio

$$D = \{f \in W^{1,1}(0, a_1), f(0) = 2\int_0^{a_1} \mu(\alpha)f(\alpha)d\alpha\}$$

è denso in $L^1(0, a_1)$. Come lo si prova?
Innanzitutto si impone questa condizione:

$$\exists \epsilon_0 > 0 \text{ t.c. } \forall \epsilon \in]0, \epsilon_0[\int_0^\epsilon \mu(\xi)d\xi > 0.$$

Presa una funzione $\phi \in L^1$ si vuol trovare una funzione $f \in W^{1,1}$ tale che $\|f - \phi\|_{L^1} < \epsilon$, quale che sia ϵ reale positivo, che verrà inteso minore di

ϵ_0.
Innanzitutto, le funzioni $\mathcal{C}_c^1$ sono dense in L^1, quindi

$$\exists g \in \mathcal{C}_c^1 ; \|g - \phi\|_{L^1} < \epsilon.$$

Come primo approccio, si considerino le funzioni non negative, per cui $g \geq 0$, e per il momento si supponga che g sia non identicamente nulla sull'intervallo $[0, \epsilon]$, il che, in virtú dell'ipotesi precedentemente posta, equivale a dire che μg non è identicamente nulla.
Ora è sufficiente trovare una funzione in $W^{1,1}$ tale che:

- $f \geq 0$
- $f(0) = \beta = 2 \int_0^{a_1} \mu(\xi) g(\xi) d\xi$
- f approssima g nel senso della norma $\|\cdot\|_{L^1}$

grazie alla quale si otterrà

$$\|f - \phi\| \leq \|f - g\| + \|g - \phi\| \leq$$

$$\leq c\epsilon + \epsilon = cost \times \epsilon.$$

Si tenterà ora di dimostrare l'esistenza della funzione voluta, costruendola tramite un parametro δ. Si ponga

$$f_\delta(x) = \begin{cases} -\frac{\beta}{\delta} x + \beta & [0, \delta] \\ zero &]\delta, \epsilon - \delta[\\ \frac{g(\epsilon)}{\delta}[x - (\epsilon - \delta)] & [\epsilon - \delta, \epsilon] \\ g &]\epsilon, a_1] \end{cases}$$

per $\delta \in]0, \frac{\epsilon}{2}]$, e

$$f_\delta(x) = \begin{cases} \frac{-\beta + (\delta - \epsilon/2)}{\epsilon/2} x + \beta & [0, \epsilon/2] \\ \frac{g(\epsilon) - (\delta - \epsilon/2)}{\epsilon/2} x - g(\epsilon) + 2(\delta - \epsilon/2) &]\epsilon/2, \epsilon] \end{cases}$$

per $\delta > \epsilon/2$.
In questo modo l'integrale

$$\int_0^{a_1} \mu(\xi) f_\delta(\xi) d\xi$$

varia con continuità rispetto a δ, passando da un valore vicino allo zero quanto si vuole, per δ piccolo, fino a un valore grande quanto si vuole, al crescere di δ; pertanto, esiste un δ per cui quell'integrale è uguale a $\int_0^{a_1} \mu(\xi) g(\xi) d\xi$.
Un caso da trattare a parte è quello in cui la funzione g sia nulla su $[0, \epsilon]$.

In questo caso è diversa la costruzione della f_δ, e si può procedere nel modo seguente:

$$f_\delta(x) = \begin{cases} -\frac{\beta}{\mu}x + \beta & [0,\delta] \\ zero &]\delta, c] \\ g(x) &]c, a_1] \cap \{g < \|g\|_\infty - \delta_0\} \\ \|g\|_\infty - \delta_0 &]c, a_1] \cap \{g \geq \|g\|_\infty - \delta_0\} \end{cases}$$

dove δ_0 è calcolato in modo opportuno perché $\int_0^{a_1} \mu f_\delta = \int_0^{a_1} \mu g$.
In questo caso piú piccolo è il δ che viene preso, migliore sarà la approssimazione della funzione g. Ovviamente, se ϕ è la funzione nulla, essa già appartiene a D.
Rimane ora da discutere il caso di funzioni che siano anche negative.
Sia ϕ una funzione qualunque di L^1, e g una sua approssimazione in $\mathcal{C}_c^1$. La funzione g si può scrivere come $g = g_+ - g_-$. Siano f_+ e f_- approssimazioni di g_+ e g_- in D. Una approssimazione di ϕ in D sarà la funzione $f_+ - f_-$. Infatti

$$\|\phi - f\| = \|\phi - (f_+ - f_-)\| = \|\phi - (g_+ - g_-) + (g_+ - g_-) - (f_+ - f_-)\| \leq$$
$$\leq \|\phi - (g_+ - g_-)\| + \|(g_+ - g_-) - (f_+ - f_-)\| \leq$$
$$\|\phi - g\| + \|g_+ - f_+\| + \|g_- - f_-\| < cost \times \epsilon.$$

La densità di D in L^1 è ora provata. Bisogna ora stabilire che

$$\exists \omega \in \mathbb{R}; \forall \lambda > \omega, \lambda \in \rho(A_0)$$

Come si caratterizza un elemento dell'insieme risolvente?

$$\lambda \in \rho(A_0) \Longleftrightarrow \forall \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in X, \exists! \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A) \ t.c$$

$$[A_0 - \lambda] \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Si comincia ora a sviluppare i conti.

$$[A_0 - \lambda] \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \phi}{\partial a} - \mu\phi - \sigma\phi - \lambda\phi \\ -\frac{\partial \psi}{\partial a} - \tau\psi - \lambda\psi - \lambda\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

L'integrazione porta a questo risultato:

$$\begin{pmatrix} \phi(a) \\ \psi(a) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \phi(0)e^{-[\lambda a + \int_0^a (\mu(\xi) + \sigma(\xi))d\xi]} + \int_0^a e^{-[\lambda(a-s) + \int_s^a (\mu(\xi)+\sigma(\xi))d\xi]} p(s)ds \\ \psi(0)e^{-[\lambda a + \int_0^a \tau(\xi)d\xi]} + \int_0^a e^{-[\lambda(a-s) + \int_s^a \tau(\xi)d\xi]} q(s)ds \end{pmatrix}$$

e siccome

$$\begin{pmatrix} \phi(a) \\ \psi(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A)$$

vale

$$\begin{pmatrix} \phi(0) \\ \psi(0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\int_0^{a_1} \mu(a)\phi(0)e^{-[\lambda a - \int_0^a (\mu+\sigma)d\xi]} + \int_0^a e^{-[\lambda(a-s)+\int_s^a (\mu+\sigma)d\xi]}p(s)dsda \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui si ricava

$$\phi(0) = \frac{2\int_0^{a_1} \mu(a)\{\int_0^a e^{-[\lambda(a-s)+\int_s^a (\mu+\sigma)d\xi]}p(s)ds\}da}{1 - 2\int_0^{a_1} \mu(a)e^{-[\lambda a + \int_0^a (\mu+\sigma)d\xi]}da}$$

I punti che non appartengono all'insieme risolvente di A sono i punti per cui $\phi(0)$ non esiste, ovverossia i punti per cui si annulla il denominatore, $1 = 2\int_0^{a_1} \mu(a)e^{-[\lambda a - \int_0^a (\mu+\sigma)d\xi]}da$. Sia

$$F(\lambda) = 2\int_0^{a_1} \mu(a)e^{-[\lambda a + \int_0^a (\mu+\sigma)d\xi]}da.$$

La funzione $F(\lambda)$ è positiva e decresce strettamente verso 0, per cui oltre un certo valore ω il denominatore sarà sempre non nullo, i.e. $]\omega, +\infty[\subseteq \rho(A)$.

$$F(\lambda) = 2\int_0^{a_1} \mu(a)e^{-[\lambda a + \int_0^a (\mu+\sigma)d\xi]}da \geq$$

$$\geq 2\int_0^{a_1} \mu(a)e^{-[\lambda a + a(\|\mu\|_\infty + \|\sigma\|_\infty)]}da =$$

$$2\int_0^{a_1} \mu(a)e^{-a(\|\mu\|_\infty + \|\sigma\|_\infty)}e^{-\lambda a}da > 0.$$

Essa decresce per $\lambda > 0$

$$\frac{d}{d\lambda}F(\lambda) = -2\lambda\int_0^{a_1} \mu(a)e^{-[\lambda a + \int_0^a (\mu+\sigma)d\xi]}da < 0 \; per \lambda > 0.$$

Si verifica ora che $\lim_{\lambda\to+\infty} F(\lambda) = 0$.

$$|F(\lambda)| \leq 2\|\mu\|_\infty \int_0^{a_1} e^{-\lambda a}e^{-\int_0^a (\mu+\sigma)d\xi}da \leq$$

$$\leq 2\|\mu\|_\infty \int_0^{a_1} e^{-\lambda a}da \leq$$

$$\leq 2\|\mu\|_\infty \int_0^{+\infty} e^{-\lambda a}da =$$

$$= 2\|\mu\|_\infty \times \frac{1}{\lambda}$$

quantità che ovviamente tende a zero al tendere di λ a $+\infty$.

Per questi $\lambda > \omega$ si ha allora

$$\begin{pmatrix} \phi(a) \\ \psi(a) \end{pmatrix} = \tag{4.1}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2\int_0^{a_1} \mu(a)\{\int_0^a e^{-[\lambda(a-s)+\int_s^a (\mu+\sigma)d\xi]} p(s)ds\}da}{1-2\int_0^{a_1} \mu(a) e^{-[\lambda a+\int_0^a (\mu-\sigma)d\xi]}da} e^{-[\lambda a+\int_0^a (\mu(\xi)+\sigma(\xi))d\xi]} + \\ -\int_0^a e^{-[\lambda(a-s)+\int_s^a (\mu(\xi)+\sigma(\xi))d\xi]} p(s)ds \\ \\ \int_0^a e^{-[\lambda(a-s)+\int_s^a \tau(\xi)d\xi]} q(s)ds \end{pmatrix}$$

Ora si procede con una stima della norma

$$\left\| [A_0 - \lambda]^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right\|_X =$$

$$= \left\| \phi(0) e^{-\lambda a - \int_0^a (\mu+\sigma)d\xi} + \int_0^a e^{-\lambda(a-s)-\int_s^a (\mu+\sigma)d\xi} p(s)ds \right\|_{L^1} +$$

$$+ \left\| \int_0^a e^{-[\lambda(a-s)-\int_s^a \tau d\xi]} q(s)ds \right\|_{L^1} = \gamma_1 + \gamma_2$$

$$\gamma_1 \leq \phi(0) \int_0^{a_1} e^{-\lambda a - \int_0^a (\mu+\sigma)d\xi} da - \int_0^{a_1} \int_0^a e^{-\lambda[a-s]-\int_s^a (\mu+\sigma)d\xi} |p(s)| ds da \leq$$

$$\leq \phi(0)\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\|p\|_{L^1} \leq$$

$$\leq \frac{2\|\mu\|_\infty \frac{1}{\lambda}\|p\|_{L^1}}{1 - 2\|\mu\|_\infty \frac{1}{\lambda}} \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\|p\|_{L^1} =$$

$$= 2\frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda - 2\|\mu\|_\infty}\|p\|_{L^1}\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\|p\|_{L^1}$$

$$\gamma_2 \leq \frac{1}{\lambda}\|q\|_{L^1}$$

Cosí la stima della norma diventa

$$\|...\| \leq 2\frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda - 2\|\mu\|_\infty}\|p\|_{L^1}\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\|p\|_{L^1} + \frac{1}{\lambda}\|q\|_{L^1} =$$

$$= \|p\|_{L^1}\left[2\frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda - 2\|\mu\|_\infty}\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\right] + \frac{1}{\lambda}\|q\|_{L^1} =$$

$$= \|p\|_{L^1}\frac{1}{\lambda - 2\|\mu\|_\infty} + \frac{1}{\lambda}\|q\|_{L^1} \leq$$

$$\leq \frac{\|p\|_{L^1} + \|q\|_{L^1}}{\lambda - 2\|\mu\|_\infty} = \frac{(p,q)_X}{\lambda - 2\|\mu\|_\infty}$$

da cui segue

$$\|(A_0 - \lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda - 2\|\mu\|_\infty}.$$

Si mostra ora che B è un operatore lineare e continuo di X in X.

$$\|B \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \|_X = \|B \begin{pmatrix} \tau\psi \\ \sigma\phi \end{pmatrix} \|_X =$$

$$= \|\tau\psi\|_{L^1} + \|\sigma\phi\|_{L^1} \leq \|\tau\|_\infty \|\psi\|_{L^1} + \|\sigma\|_\infty \|\phi\|_{L^1} \leq$$

$$\leq [\|\psi\|_{L^1} + \|\phi\|_{L^1}] \times \max\{\|\tau\|_\infty, \|\sigma\|_\infty\}$$

il che implica

$$\|B\| \leq \max\{\|\tau\|_\infty, \|\sigma\|_\infty\}.$$

4.3 Positività del semigruppo

I dati iniziali (p_0, q_0) vengono ovviamente scelti non negativi per ovvio significato biologico, $p_0 \geq 0$ e $q_0 \geq 0$. È vero che $T_t \begin{pmatrix} p_0(\cdot) \\ q_0(\cdot) \end{pmatrix}$ appartiene allo spazio $(L^1_+(0, a_1))^2$, i.e. che $p(\cdot, t) \geq 0$ e $q(\cdot, t) \geq 0$?

Si vada considerare il problema non perturbato

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial t} = -\mu p - \sigma p \\ \frac{\partial q}{\partial a} + \frac{\partial q}{\partial t} = -\tau q \\ p(0,t) = 2\int_0^{a_1} \mu(\xi) p(\xi, t) d\xi \\ q(0,t) = 0 \\ p(a,0) = p_0(a) \\ q(a,0) = q_0(a) \end{cases} \tag{4.2}$$

Esso corrisponde al problema dato con l'operatore lineare non perturbato A_0, e si può scrivere come due problemi distinti:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial t} = -\mu p - \sigma p \\ p(0,t) = 2\int_0^{a_1} \mu(\xi) p(\xi, t) d\xi = B[t] \\ p(a,0) = p_0(a) \end{cases} \tag{4.3}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial a} + \frac{\partial q}{\partial t} = -\tau q \\ q(0,t) = 0 \\ q(a,0) = q_0(a) \end{cases} \tag{4.4}$$

Il problema 4.3 si integra facilmente

$$p(a,t) = \begin{cases} p_0(a-t) e^{-\int_{a-t}^{a} (\mu(\xi) + \sigma(\xi)) d\xi} & a > t \\ B(t-a) e^{-\int_0^a (\mu+\sigma) d\xi} & a < t \end{cases} \tag{4.5}$$

Come si stima $B[t]$? Ponendo $e^{-\int_0^a [\mu(\xi)+\sigma(\xi)]d\xi} = \Pi(a)$

$$B[t] = 2\int_0^{a_1} \mu(\xi)p(\xi,t)d\xi =$$

$$= 2\int_0^t \mu(\xi)B(t-\xi)\Pi(\xi)d\xi + 2\int_t^{+\infty} \mu(\xi)p_0(\xi-t)\frac{\Pi(\xi)}{\Pi(\xi-t)}d\xi =$$

$$= 2\int_0^t \mu(\xi)B(t-\xi)\Pi(\xi)d\xi + 2\int_0^{+\infty} \mu(\xi+t)p_0(\xi)\frac{\Pi(\xi+t)}{\Pi(\xi)}d\xi =$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \mu(\xi+t)p_0(\xi)\frac{\Pi(\xi+t)}{\Pi(\xi)}d\xi + \int_0^t B(\xi)[2\mu(t-\xi)\Pi(t-\xi)]d\xi =$$

$$= F[t] + \int_0^t B(\xi)K(t-\xi)d\xi$$

che è una equazione integrale di Volterra.
Essa possiede una unica soluzione continua e non negativa su $[0,+\infty[$.
Tutte le quantità che compaiono in 4.5 sono maggiori o uguali a zero, quindi si conclude $p(a,t) \geq 0 \ \forall (a,t) \in [0,a_1] \times [0,+\infty[$.

Anche il problema 4.4 si integra facilmente:

$$q(a,t) = \begin{cases} q_0(a-t)e^{-\int_{a-t}^{a} \tau(\xi)d\xi} & a > t \\ 0 & a < t \end{cases} \tag{4.6}$$

E chiaramente $q(a,t) \geq 0$.

Se si dà nome (U_t) e (V_t) ai semigruppi relativi alle soluzioni del problemi 4.3 e 4.4

$$p(\cdot,t) = U_t p_o(\cdot)$$

$$q(\cdot,t) = V_t q_0(\cdot)$$

dove qui bisogna fare attenzione perché p e q sono le soluzioni dei problemi non perturbati.
Vale la seguente uguaglianza:

$$U_t p_0(a) = p(a,t) = p(0,t-a)e^{-\int_0^a (\mu(w)+\sigma(w)dw)} =$$

$$= U_{t-a}p_0 e^{-\int_0^a (\mu(w)+\sigma(w)dw)} \ per\ t > a$$

(U_t) risulta essere un semigruppo irriducibile (oltre che fortemente continuo e positivo): per $t > a_1$ vale

$$U_t p_0(a) = p(a,t) = B(t-a)e^{-\int_0^a (\mu+\sigma)d\xi} > 0$$

perché lo sono le quantità $B(t-a)$ e $\exp(-\int \ldots)$.

Continuando a chiamare p e q le funzioni nel caso del problema perturbato, ed utilizzando la formula di variazione delle costanti

$$p(\cdot,t) = U_t p_0 + \int_0^t U_{t-s}(\tau(\cdot)q(\cdot,s))ds$$

$$q(\cdot,t) = V_t q_0 + \int_0^t V_{t-s}(\sigma(\cdot)p(\cdot,s))ds$$

Con l'aiuto delle matrici si scrive in forma piú compatta

$$T_t\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_t & 0 \\ 0 & V_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} U_{t-s} & 0 \\ 0 & V_{t-s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \tau \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} T_s \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} ds$$

che è un'altra equazione integrale di Volterra, e possiede una unica soluzione non negativa.

Il semigruppo (T_t) è pertanto positivo.

4.4 Definitiva compattezza del semigruppo

Per dimostrare che il semigruppo (T_t) è compatto si passa attraverso la matrice risolvente del problema stazionario, usata per effettuare un cambio di variabile.

Sia

$$\begin{pmatrix} p'(a) \\ q'(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu(a) - \sigma(a) & \tau(a) \\ \sigma(a) & -\tau(a) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p(a) \\ q(a) \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

il problema stazionario. Esso si può risolvere tramite la matrice risolvente, le cui proprietà sono esposte al paragrafo 1.5.

Si effettua un cambio di variabile in questo modo:

$$\begin{pmatrix} p(a,t) \\ q(a,t) \end{pmatrix} = W(a)\begin{pmatrix} \tilde{p}(a,t) \\ \tilde{q}(a,t) \end{pmatrix}$$

e si vuole dimostrare che il problema

$$\begin{cases} (1) = \frac{\partial p}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial t} - a_{11}p - a_{12}q = 0 \\ (2) = \frac{\partial q}{\partial a} + \frac{\partial q}{\partial t} - a_{21}p - a_{22}q = 0 \\ p(0,t) = B(t) = 2\int_0^{a_1} \mu(\xi)p(\xi)d\xi \\ q(0,t) = 0 \\ p(a,0) = p_0(a) \\ q(a,0) = q_0(a) \end{cases} \tag{4.8}$$

è equivalente al problema

$$\begin{cases} (\tilde{1}) = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial a} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = 0 \\ (\tilde{2}) = \frac{\partial \tilde{q}}{\partial a} + \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} = 0 \\ \tilde{p}(0,t) = 2\int_0^{a_1} \mu(\xi)[w_{11}(\xi)\tilde{p}(\xi,t) + w_{12}(\xi)\tilde{q}(\xi,t) \\ \tilde{q}(0,t) = 0 \\ \tilde{p}(a,0) = \tilde{p_0}(a) \\ \tilde{q}(a,0) = \tilde{q_0}(a) \end{cases} \tag{4.9}$$

Siccome $w_{ij}(0) = \delta_{ij}$ (delta di Kronocker)

$$p(0,t) = w_{11}(0)\tilde{p}(0,t) + w_{12}(0)\tilde{q}(0,t) = \delta_{11}\tilde{p}(0,t) + \delta_{12}\tilde{q}(0,t) = \tilde{p}(0,t)$$

e analogamente

$$q(0,t) = \tilde{q}(0,t).$$

Ora,

$$(1) = \frac{\partial}{\partial a}[w_{11}(a)\tilde{p}(a,t) + w_{12}(a)\tilde{q}(a,t)] + \frac{\partial}{\partial t}[w_{11}(a)\tilde{p}(a,t) + w_{12}(a)\tilde{q}(a,t)] -$$

$$-a_{11}(a)[w_{11}(a)\tilde{p}(a,t)+w_{12}(a)\tilde{q}(a,t)] - a_{12}(a)[w_{21}(a)\tilde{p}(a,t)+w_{22}(a)\tilde{q}(a,t)] =$$

$$= w'_{11}\tilde{p} + w_{11}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial a} + w'_{12}\tilde{q} + w_{12}\frac{\partial\tilde{q}}{\partial a} + w_{11}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial t} + w_{12}\frac{\partial\tilde{q}}{\partial t} -$$

$$-a_{11}w_{11}\tilde{p} - a_{11}w_{12}\tilde{q} - a_{12}w_{21}\tilde{p} - a_{21}w_{22}\tilde{q} =$$

$$= a_{11}w_{11}\tilde{p} + a_{12}w_{21}\tilde{p} + w_{11}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial a} + a_{11}w_{12}\tilde{q} + a_{12}w_{22}\tilde{q} + w_{12}\frac{\partial\tilde{q}}{\partial a} + w_{11}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial t} +$$

$$+w_{12}\frac{\partial\tilde{q}}{\partial t} - a_{11}w_{11}\tilde{p} - a_{11}w_{12}\tilde{q} - a_{12}w_{21}\tilde{p} - a_{12}w_{22}\tilde{q} = 0$$

usando la $(\tilde{1})$ e la $(\tilde{2})$ e semplificando i termini di segno oppposto.
Analogamente si procede con la

$$(2) = \frac{\partial}{\partial a}[w_{21}\tilde{p} + w_{22}\tilde{q}] + \frac{\partial}{\partial t}[w_{21}\tilde{p} + w_{22}\tilde{q}] - a_{21}p - a_{22}q =$$

$$= w'_{21}\tilde{p} + w_{21}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial a} + w'_{22}\tilde{q} + w_{22}\frac{\partial\tilde{q}}{\partial a} + w_{21}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial t} + w_{22}\frac{\partial\tilde{q}}{\partial t} -$$

$$-a_{21}w_{11}\tilde{p} - a_{21}w_{21}\tilde{q} - a_{22}w_{21}\tilde{p} - a_{22}w_{22}\tilde{q} =$$

$$= [a_{21}w_{11} - a_{22}w_{21}]\tilde{p} + w_{21}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial a} + [a_{21}w_{12} + a_{22}w_{22}]\tilde{q} - w_{22}\frac{\partial\tilde{q}}{\partial a} + w_{21}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial t} +$$

$$+w_{22}\frac{\partial\tilde{q}}{\partial t} + a_{21}w_{11}\tilde{p} + a_{21}w_{12}\tilde{q}a_{22}w_{21}\tilde{p} + a_{22}w_{22}\tilde{q} = 0.$$

Quindi $(\tilde{1})$ e $(\tilde{2})$ implicano (1) e (2).
Si verifica il viceversa:

$$(1) = a_{11}w_{11}\tilde{p} + a_{12}w_{21}\tilde{p} + w_{11}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial a} + a_{11}w_{12}\tilde{q} + a_{12}w_{22}\tilde{q} + w_{12}\frac{\partial\tilde{q}}{\partial a} +$$

$$+w_{11}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial t} + w_{12}\frac{\partial\tilde{q}}{\partial t} - a_{11}w_{11}\tilde{p} - a_{11}w_{12}\tilde{q} - a_{12}w_{21}\tilde{p} - a_{12}w_{22}\tilde{q} =$$

$$= w_{11}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial a} + w_{12}\frac{\partial\tilde{q}}{\partial a} + w_{11}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial t} + w_{12}\frac{\partial\tilde{q}}{\partial t}$$

per cui

$$(1) = w_{11}[\frac{\partial\tilde{p}}{\partial a} + \frac{\partial\tilde{p}}{\partial t}] + w_{12}[\frac{\partial\tilde{q}}{\partial a} + \frac{\partial\tilde{q}}{\partial t}] = 0$$

e analogamente

$$(2) = ... = w_{21}[\frac{\partial \tilde{p}}{\partial a} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t}] + w_{22}[\frac{\partial \tilde{q}}{\partial a} + \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t}] = 0$$

Esse debbono valere per ogni $(a, t) \in [0, a_1] \times [0, +\infty[$, in particolare

$$(1)|_{a=0} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \tilde{p}}{\partial a} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = 0$$

$$(2)|_{a=0} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \tilde{q}}{\partial a} + \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} = 0$$

I due sistemi, insomma, si equivalgono.

Per provare la definitiva compattezza del semigruppo (T_t) si dimostrerà la definitiva compattezza del semigruppo $(\tilde{T}_t)$ relativo alle soluzioni del problema 4.9.

L'integrazione del problema 4.9 dà:

$$\tilde{q}(a,t) = \begin{cases} \tilde{q}(a-t,0) & a > t \\ 0 & a < t \end{cases}$$

e

$$\tilde{p}(a,t) = \begin{cases} \tilde{p}(a-t,0) & a > t \\ \tilde{p}_0(0,t-a) & a < t \end{cases}$$

Qualche calcolo porta a

$$\tilde{p}(0,t) = \begin{cases} 2\int_0^t \mu(\xi)w_{11}(\xi)\tilde{p}(0,t-\xi)d\xi + & t < a_1 \\ -2\int_t^{a_1} \mu(\xi)[w_{11}(\xi)\tilde{p}(0,t-\xi) + w_{12}(\xi)\tilde{q}(\xi-t,0)d\xi & \\ & \\ 2\int_0^{a_1} \mu(\xi)w_{11}(\xi)\tilde{p}(0,t-\xi)d\xi & t > a_1 \end{cases}$$

Si vuole arrivare a scrivere una equazione integrale di Volterra per risolvere $\tilde{p}(0,t)$. Vengono introdotte le seguenti funzioni:

$$K(a) = \begin{cases} \mu(a)w_{11}(a) & a \in [0, a_1] \\ 0 & a > a_1 \end{cases}$$

$$G(t) = \begin{cases} 2\int_t^{a_1} \mu(\xi)[w_{11}(\xi)\tilde{p}(\xi-t,0) + w_{12}(\xi)\tilde{q}(\xi-t,0)d\xi & t < a_1 \\ 0 & t > a_1 \end{cases}$$

Si arriva alla seguente formulazione

$$\tilde{p}(0,t) = G(t) - \int_0^t 2K(\xi)\tilde{p}(0,t-\xi)d\xi \tag{4.10}$$

che è proprio l'equazione integrale di Volterra cercata, e che ha come unica soluzione $p(0,\cdot)$.

Vengono ora introdotti i seguenti operatori:

$$H : X \longrightarrow L^1(0, 2a_1)$$

$$H\begin{pmatrix}\tilde{p_0}\\ \tilde{q_0}\end{pmatrix} = \tilde{p}(0,\cdot)$$
$$S : L^1(a_1, 2a_1) \longrightarrow L^1(0, a_1)$$
$$Sf(\cdot) = f(2a_1 - \cdot)$$
$$T : L^1(0, 2a_1) \longrightarrow L^1(a_1, 2a_1)$$
$$Tf(t) = 2\int_0^{a_1} K(\xi)\tilde{p_0}(t-\xi)d\xi$$

H e S sono operatori lineari e continui, T è compatto.

Linearità e continuità dell'operatore H

La linearità è subito evidente, dipende dalla linearità dell'integrale rispetto alla somma.
Le ipotesi del 1.56 sono soddisfatte dalle $K(\cdot)$ e $G(\cdot)$. C'è pertanto una unica R localmente integrabile tale che

$$\tilde{p}(0,t) = G(t) - \int_0^t R(t-s)G(s)ds$$

È ora importante trovare delle buone maggiorazioni su G e sul suo integrale.

$$G(t) \leq 2a_1\|\mu\|_\infty \max\{\|w_{11}\|_\infty, \|w_{12}\|_\infty\}[\|\tilde{p_0}\|_{L^1(0,a_1)} + \|\tilde{q_0}\|_{L^1(0,a_1)}]$$

Ora,

$$\|H\begin{pmatrix}\tilde{p_0}\\ \tilde{q_0}\end{pmatrix}\|_{L^1(0,2a_1)} = \int_0^{2a_1} \tilde{p}(0,\xi)d\xi =$$
$$= \int_{t=0}^{t=2a_1} G(t) - \int_{t=0}^{t=2a_1}\int_{s=0}^{s=t} R(t-s)G(s)ds \leq$$
$$\leq 2a_1 \times 2a_1\|\mu\|_\infty \max\{\|w_{11}\|_\infty, \|w_{12}\|_\infty\}[\|\tilde{p_0}\|_{L^1(0,a_1)} + \|\tilde{q_0}\|_{L^1(0,a_1)}] +$$
$$+\|R\|_{L^1(0,2a_1)}2a_1\|\mu\|_\infty \max\{\|w_{11}\|_\infty, \|w_{12}\|_\infty\}[\|\tilde{p_0}\|_{L^1(0,a_1)} + \|\tilde{q_0}\|_{L^1(0,a_1)}] \leq$$
$$\leq cost \times [\|\tilde{p_0}\|_{L^1(0,a_1)} + \|\tilde{q_0}\|_{L^1(0,a_1)}]$$

il che prova la continuità dell'operatore H.

Linearità e continuità dell'operatore S

Per quel che riguarda S, esso è lineare per definizione della somma fra funzioni, i.e. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. La continuità si prova cosí

$$\|Sf\|_{L^1(0,a^1)} = \int_0^{a_1} |f(2a_1 - \xi)|d\xi = \int_{a_1}^{2a_1} |f(a_1 - \xi)|d\xi =$$
$$= \int_{a_1}^{2a_1} |f(\xi)|d\xi = \|f\|_{L^1(a_1,2a_1)}$$

il che prova che la norma $\|S\| = 1$.

Linearità e definitiva compattezza dell'operatore T

Per quanto riguarda la compattezza di T, essa deriva dal fatto che è definito tramite una convoluzione, e si applica il 1.57.

Siccome la composizione fra operatori continui e compatti dà luogo a operatori compatti, l'operatore STH è compatto.

$$STH\begin{pmatrix}\tilde{p_0}\\ \tilde{q_0}\end{pmatrix}(u)=$$

$$=ST\bar{p}(0,u)=S2\int_0^{a_1}K(\xi)\bar{p}(0,u-\xi)d\xi=$$

$$=2\int_0^{a_1}K(\xi)\bar{p}(0,2a_1-u-\xi)d\xi=$$

$$=2\int_0^{a_1}\mu(\xi)w_{11}(\xi)\bar{p}(0,2a_1-u-\xi)d\xi$$

Ora,

$$\tilde{T_{2a_1}}\begin{pmatrix}\tilde{p_0}\\ \tilde{q_0}\end{pmatrix}(u)=\begin{pmatrix}\bar{p}(0,2a_1-u)\\ 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\int_0^{a_1}\mu(\xi)w_{11}(\xi)\bar{p}(0,2a_1-u-\xi)d\xi\\ 0\end{pmatrix}$$

È quindi chiaro che

$$\tilde{T_{2a_1}}\begin{pmatrix}\tilde{p_0}\\ \tilde{q_0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}STH(\tilde{p_0},\tilde{q_0})\\ 0\end{pmatrix}$$

È stato cosíprovato che $\tilde{T_{2a_1}}$ è compatto, e di conseguenza anche T_{2a_1}.

4.5 Irriducibilità del semigruppo

Innanzitutto bisogna fare alcune considerazioni riguardo ai dati iniziali p_0 e q_0.
Si supponga che $q_0 \neq 0$, i.e. che $\exists a_0 : q_0(a_0) > 0$.
È possibile che $p(\cdot,t)=0\ \forall t \geq 0$, i.e. che la popolazione si estingua, visto che non possono nascere cellule figlie?
O ancora, quali ipotesi renderebbero contraddittoria l'estinzione? Si è supposto che σ e τ non siano identicamente nulle. In particolare esisterà un intorno $U \subseteq [0,a_1]$ in cui $\tau > 0$.

Si supponga $p(\cdot, t) = 0$. Il problema 3.17 diventa:

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial p}{\partial a}(a,t) + \frac{\partial p}{\partial t}(a,t) = \tau(a)q(a,t) \\ \frac{\partial q}{\partial a}(a,t) + \frac{\partial q}{\partial t}(a,t) = \sigma(a)p(a,t) - \tau(a)q(a,t) = 0 \\ p(0,t) = 2\int_0^{a_1} \mu(\xi)p(\xi,t)d\xi = 0 \\ q(0,t) = 0 \\ p(a,0) = p_0(a) \\ q(a,0) = q_0(a) \end{cases}$$

e si risolve facilmente:

$$p(a,t) = 0$$

$$q(a,t) = \begin{cases} q_0(a-t) & t < a \\ 0 & t > a \end{cases}$$

Vale pertanto

$$q_0(a_0) = q_0[(a_0 + t) - t] = q(a_0 + t, t)$$

da cui

$$\tau(a_0 + t)q(a_0 + t, t) = 0 \ \forall t \geq 0$$

Si esaminino i seguenti conti: essi non sono corretti, verranno fatte in segito delle considerazioni per "aggiustarli":

$$0 < q_0(a_0)\int_U \tau(\xi)d\xi = \int_{U-a_0} \tau(\xi + a_0)q_0(a_0)d\xi =$$

$$= \int_{U-a_0} q(a_0 + \xi, \xi)\tau(\xi + a_0)d\xi = 0$$

Che cosa c'è che non va?
Sia $U = [\alpha, \beta]$; l'integrazione deve comunque essere fatta dentro l'intervallo $[0, a_1]$, per cui

$$[\alpha, \beta] \subseteq [0, a_1]$$

e poi

$$[\alpha - a_0, \beta - a_0] \subseteq [0, a_1]$$

da cui si ricava

$$\alpha \geq a_0$$

$$\beta \leq a_1$$

Per evitare l'estinzione bisognerebbe imporre delle condizioni sul tasso τ che dipendono dal dato iniziale q_0, ma questo non ha senso. Bisogna imporre una ipotesi che riguardi il solo dato iniziale. Si sa che $a_0 < a_1$, quindi basta decidere che per quanto ci si avvicini a a_1 ci sono comunque delle cellule che da quiescenti diventano prolifiche, in termini matematici:

$$\exists \epsilon_0 \in]0, a_1[\ t.c. \forall \epsilon \in]0, \epsilon_0[\ si \ ha \ \int_{a_1-\epsilon}^{a_1} \tau(\xi)d\xi > 0$$

E viceversa, è possibile supporre $p_0 \neq 0$ e avere $q_0(\cdot,t) = 0 \forall t \geq 0$? Ciò accade unicamente quando non nascono cellule figlie (se ne nascessero, una parte di esse dovrebbe per forza diventare quiescente prima o poi, perche σ non è identicamente nullo. Insomma $q_0(\cdot,t) = 0$ implica l'estinzione.
Questo si può evitare forzando le cellule a dividersi per quanto vicine siano all'età massima a_1, i.e. imponendo la seguente condizione su μ:

$$\exists \epsilon_0 \in]0, a_1[\ t.c. \forall \epsilon \in]0, \epsilon_0[\ si \ ha \ \int_{a_1-\epsilon}^{a_1} \mu(\xi)d\xi > 0$$

Va messa anche una ipotesi su σ, oltre che sugli altri tassi; essa swervirà piú avanti:

$$\exists \epsilon_0 \in]0, a_1[\ t.c. \forall \epsilon \in]0, \epsilon_0[\ si \ ha \ \int_0^{\epsilon} \sigma(\xi)d\xi > 0$$

Ora si può cominciare a discutere la irriducibilità del semigruppo (T_t).
Senza perdita di generalità si suppone che siano $p_0 \neq 0$ e $q_0 \neq 0$ (la scelta del tempo iniziale è arbitraria.

Il duale di $L^1(0, a_1)$ è lo spazio $L^\infty(0, a_1)$, e il prodotto di dualità è

$$\langle f, \phi \rangle = \int_0^{a_1} \phi(a) f(a) da$$

Si consideri allora

$$(\phi, \psi) \in (L^\infty{}_+ \times L^\infty{}_+) \setminus \{(0,0)\}$$

e ci si domanda se esista $t_0 > 0$ tale per cui

$$\langle T_{t_0}(p_0, q_0), (\phi, \psi) \rangle > 0$$

Si sviluppano i conti:

$$\langle T_{t_0}(p_0, q_0), (\phi, \psi) \rangle = \langle p(\cdot, t), \phi(\cdot) \rangle + \langle q(\cdot, t), \psi(\cdot) \rangle =$$

$$= \langle U_t p_0(\cdot) + \int_0^t U_{t-s}(\tau(\cdot) q(\cdot, s)) ds, \phi(\cdot) \rangle + \langle V_t q_0 + \int_0^t V_{t-s}(\sigma(\cdot) p(\cdot, s)) ds, \psi(\cdot) \rangle \tag{4.11}$$

A questo punto la discussione viene spezzata in due rami: ϕ diverso da zero oppure ψ diverso da zero.

1. $\phi \neq 0$ Siccome (U_t) è irriducibile, esiste t_0 tale che $\langle U_{t_0} p_0, \phi \rangle > 0$, da cui facilmente

$$\langle U_{t_0} p_0(\cdot) + \int_0^{t_0} U_{t_0-s}(\tau(\cdot) q(\cdot, s)) ds, \phi(\cdot) \rangle +$$

$$+ \langle V_{t_0} q_0 + \int_0^{t_0} V_{t_0-s}(\sigma(\cdot) p(\cdot, s)) ds, \psi(\cdot) \rangle \geq$$

$$\geq \langle U_{t_0} p_0(\cdot) + \int_0^{t_0} U_{t_0-s}(\tau(\cdot) q(\cdot, s)) ds, \phi(\cdot) \rangle \geq \langle U_{t_0} p_0(\cdot), \phi(\cdot) \rangle > 0$$

2. $\psi \neq 0$

$$J(t) = \langle U_t p_0(\cdot) + \int_0^t U_{t-s}(\tau(\cdot)q(\cdot,s))ds, \phi(\cdot)\rangle +$$

$$+\langle V_t q_0 + \int_0^t V_{t-s}(\sigma(\cdot)p(\cdot,s))ds, \psi(\cdot)\rangle \geq$$

$$\geq \langle V_t q_0 + \int_0^t V_{t-s}(\sigma(\cdot)p(\cdot,s))ds, \psi(\cdot)\rangle \geq$$

$$\geq \langle \int_0^t V_{t-s}(\sigma(\cdot)p(\cdot,s))ds, \psi(\cdot)\rangle =$$

$$= \int_{\xi=0}^{\xi=a_1} \psi(\xi) \int_{s=0}^{s=t} V_{t-s}(\sigma(\xi)p(\xi,s))dsd\xi =$$

$$= \int_{\xi=0}^{\xi=a_1} \psi(\xi) \int_{s=0}^{s=t} \sigma(\xi-t+s)p(\xi-t+s,s)e^{-\int_{\xi-t-s}^{\xi}\tau(w)dw}dsd\xi =$$

(grazie alla 4.6)

$$= \int_{\xi=0}^{\xi=a_1} \psi(\xi) \int_{s=t-\xi}^{s=t} \sigma(\xi-t+s)p(\xi-t+s,s)e^{-\int_{\xi-t-s}^{\xi}\tau(w)dw}dsd\xi$$

perché $\sigma(a) = 0$ fuori di $[0, a_1]$. $\sigma(\xi - t + s)$ può essere diverso da zero per $\xi - t + s \geq 0 \Longrightarrow s \geq t - \xi$.
Ora,

$$p(\xi-t+s,s) = U_s p_0(\xi-t+s) = U_{t-\xi}p_0(0)e^{-\int_0^{\xi-t-s}(\mu(w)+\sigma(w))dw} =$$

$$= U_t p_0(\xi)e^{-\int_0^{\xi-t-s}(\mu(w)+\sigma(w))dw}e^{\int_0^{\xi}(\mu(w)+\sigma(w))dw} =$$

$$= U_t p_0(\xi)e^{\int_\xi^{\xi-t+s}(\mu(w)+\sigma(w))}$$

$$J(t) \geq \int_0^{a_1} \psi(\xi) \int_{t-\xi}^t \sigma(\xi-t+s)U_t p_0(\xi)e^{-\int_\xi^{\xi-t+s}(\mu(w)+\sigma(w))dw}\times$$

$$\times e^{-\int_{\xi-t+s}^{\xi}\tau(w)dw}dsd\xi =$$

$$= \int_0^{a_1} \psi(\xi)U_t p_0(\xi) \int_{t-\xi}^t \sigma(\xi-t+s)\times$$

$$\times e^{-\int_\xi^{\xi-t+s}(\mu(w)+\sigma(w)-\tau(w))dw}dsd\xi$$

Serviranno alcune minorazioni:

$$e^{-\int_\xi^{\xi-t+s}(\mu(w)+\sigma(w)-\tau(w))dw} = e^{\int_{\xi-t-s}^{\xi}(\mu(w)+\sigma(w)-\tau(w))dw} \geq$$

$$\geq e^{-\int_{\xi-t-s}^{\xi}\tau(w)dw} =$$

$$= e^{-\int_{\xi-t+s}^{\xi} \tau(w)dw} \geq e^{-\int_0^{\xi} \tau(w)dw}$$

e

$$\int_{t-\xi}^{t} \sigma(\xi - t + s)ds = \int_0^{\xi} \sigma(w)dw > 0 \ \forall \xi \in]0, a_1[$$

per ipotesi. Insomma

$$J(t) \geq \int_0^{a_1} \psi(\xi) U_t p_0(\xi) e^{-\int_0^{\xi} \tau(w)dw} \int_{t-\xi}^{t} \sigma(\xi - t + s) ds d\xi =$$

$$= J(t) \geq \int_0^{a_1} \psi(\xi) U_t p_0(\xi) e^{-\int_0^{\xi} \tau(w)dw} \int_0^{\xi} \sigma(w) dw d\xi$$

Essendo (U_t) irriducibile, per qualche $t_0 > a_1$

$$J(t_0) > 0$$

il che conclude la prova sulla irriducibilità di (U_t).

4.6 Analisi del modello con parametri costanti

Viene ora portata una breve analisi del modello sotto l'ipotesi che i parametri μ, σ e τ siano costanti. In questo caso si riesce ad esplicitare il parametro di Malthus.
Il risolvente si calcola esplicitamente, dalla formula 4.1, e risulta

$$R[\lambda, A] \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\mu \int_0^{\infty} \int_0^{a} e^{-(\lambda+\mu+\sigma)(a-s)} p(s) ds da}{1 - 2\mu \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+\mu+\sigma)a}} e^{-(\lambda+\mu+\sigma)a} + \\ + \int_0^{a} e^{-(\lambda+\mu+\sigma)(a-s)} p(s) ds \\ \\ \int_0^{a} e^{-(\lambda-\tau)(a-s)} q(s) ds \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2\mu \frac{1}{\lambda+\mu-\sigma} \int_0^{\infty} p(s) ds}{1 - 2\mu \frac{1}{\lambda+\mu+\sigma}} e^{-(\lambda+\mu+\sigma)a} + \int_0^{a} e^{-(\lambda-\mu+\sigma)(a-s)} p(s) ds \\ \int_0^{a} e^{-(\lambda+\tau)(a-s)} q(s) ds \end{pmatrix} =$$

per $Re(\lambda) > (-\mu - \sigma), \lambda \neq \mu - \sigma$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2\mu}{\lambda+\sigma-\mu} \int_0^{\infty} p(s) ds e^{-(\lambda-\mu-\sigma)a} + \int_0^{a} e^{-(\lambda+\mu+\sigma)(a-s)} p(s) ds \\ \int_0^{a} e^{-(\lambda+\tau)(a-s)} q(s) ds \end{pmatrix}.$$

Una stima della norma dà ora:

$$\left\| R[\lambda, A] \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right\|_X \leq$$

$$\leq \frac{2\mu}{|\lambda + \sigma - \mu|} \left| \int_0^{\infty} p(s) ds \right| \frac{1}{|\lambda + \mu - \sigma|} + \frac{1}{|\lambda + \mu + \sigma|} \left| \int_0^{\infty} p(s) ds \right| + \frac{1}{|\lambda + \tau|} \left| \int_0^{\infty} q(s) ds \right| \leq$$

$$\leq \|p\| \left[\frac{2\mu + 1}{|\lambda + \sigma - \mu|} \right] + \|q\| \frac{1}{|\lambda + \tau|} \leq$$

$$\leq \max \left[\frac{2\mu + 1}{|\lambda + \sigma - \mu|}, \frac{1}{|\lambda + \tau|} \right] \left\| \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right\|.$$

Quindi, per

$$Re(\lambda) > -(\mu + \sigma), \lambda \neq \mu - \sigma$$

$R[\lambda, A]$ è un operatore lineare e continuo.
$\mu - \sigma$ è un polo di ordine uno del risolvente, pertanto è un autovalore di molteplicità algebrica uno, quindi il miglior candidato ad essere il parametro di Malthus.
Si ha quindi che lo spettro di A contiene un autovalore $\mu - \sigma$, e il resto dello spettro è incluso nel semipiano $\{Re(z) \leq \max[-(\mu + \sigma), -\tau]\}$.

In conclusione, se $\mu - \sigma > -\tau$ (è già ovvio che $\mu - \sigma > -\mu - \sigma$) c'è sicuramente crescita esponenziale asincrona, perché si applica il teorema 2.4, e il parametro di Malthus è allora

$$\lambda_0 = \mu - \sigma.$$

Se $\mu > \sigma$ la popolazione "esplode", se $\mu = \sigma$ essa rimane costante, e se $\mu < \sigma$ la popolazione si estingue.

Capitolo 5

UN MODELLO DI POPOLAZIONE PER ANIMALI INFETTATI DA MACROPARASSITI

5.1 Descrizione del modello

Si intende analizzare un modello relativo ad animali infettati da macroparassiti. Ogni individuo può portare su di sé un certo numero i di parassiti, dove i è un intero non negativo.
Si pone $p_i(a,t)$ il numero di animali aventi età compresa fra a e $a+da$ al tempo t e aventi un numero di parassiti pari a i. In questo modo la popolazione totale è

$$N(t) = \sum_{i=0}^{i=+\infty} \int_0^{+\infty} p_i(s,t)ds$$

e i parassiti sono in totale

$$P(t) = \sum_{i=1}^{i=+\infty} i \int_0^{+\infty} p_i(s,t)ds.$$

Si introducono i tassi di natalità e mortalità β e μ.
Si suppone che β abbia questa forma:

$$\beta(p) = \psi(N)\beta_0(a)$$

dove ψ è una funzione tale che $\psi(0)=1$, $\psi' < 0$ e $\lim_{N\to+\infty}\psi(N) = 0$. La fertilità quindi cala al crescere della popolazione, e varia a seconda dell'età, ma non è influenzata dal numero di parassiti che l'animale porta su di sé.
Si introduce una mortalità aggiuntiva $\alpha > 0$ per ogni parassita in carico.

Viene introdotto anche un tasso di mortalità dei parassiti, σ, anch'esso una costante reale positiva.
E infine si introduce il tasso di infezione $\varphi(t)$, che funziona in questo modo: $\varphi(t)p_i(a,t)$ dice quanti animali aventi al tempo t hanno età compresa fra a e $a+da$ e i parassiti acquisiscono un ulteriore parassita nel tempo dt. Si suppone che φ abbia questa forma:

$$\varphi(t) = \frac{hP(t)}{c+N(t)}.$$

Che cosa la giustifica?
Se $L(t)$ è il numero di larve al tempo t, si suppone che il loro numero sia sottoposto a questa dinamica:

$$L'(t) = hP(t) - \delta L(t) - \theta L(t)N(t)$$

dove h è il tasso di produzione delle uova dei parassiti, δ è il tasso di mortalità delle larve e θ è il tasso a cui le larve vengono ingerite dagli animali. Se si suppone che tutte le larve ingerite dagli animali diventino parassiti si ha

$$\theta L(t) = \varphi(t).$$

Se inoltre si suppone in virtú della scala dei tempi che il numero totale di larve sia costante

$$0 = hP(t) - \delta L(t) - \theta L(t)N(t)$$

da cui

$$L(t) = \frac{hP(t)}{\delta + \theta N(t)}$$

e infine

$$\phi(t) = \theta\frac{hP(t)}{\delta+\theta N(t)} = \frac{hP(t)}{\frac{\delta}{\theta}+N(t)} =$$

$$= \frac{hP(t)}{c+N(t)}.$$

5.2 Derivazione del modello

Il modello si può derivare con conti analoghi a quelli fatti per il modello cellulare.
Quanto vale

$$\int_0^{a+h} p_0(\tilde{a}, t+h)d\tilde{a}?$$

Il numero degli animali sani aventi al tempo $t+h$ età minore o uguale di $a+h$ è pari al numero di animali che avevano al tempo t età minore o uguale di a, meno gli animali che sono morti nel frattempo, meno gli animali che vengono infettati, piú gli animali il cui unico parassita scompare, piú gli animali che sono nati (gli animali nascono tutti sani, i.e. non c'è trasmissione verticale della malattia), in termini matematici:

$$\int_0^{a+h} p_0(\tilde{a},t+h)d\tilde{a} = \int_{\tilde{a}=0}^{\tilde{a}=a} p_0(\tilde{a},t)d\tilde{a} - \int_{\tilde{t}=0}^{\tilde{t}=h}\int_{\tilde{a}=0}^{\tilde{a}=a+\tilde{t}} \mu(\tilde{a})p_0(\tilde{a},t+\tilde{t})d\tilde{a}d\tilde{t}-$$

$$-\int_{\tilde{t}=0}^{\tilde{t}=h}\int_{\tilde{a}=0}^{\tilde{a}=a+\tilde{t}} \varphi(t)p_0(\tilde{a},t-\tilde{t})d\tilde{a}d\tilde{t}+$$

$$+\int_{\tilde{t}=0}^{\tilde{t}=h}\int_{\tilde{a}=0}^{\tilde{a}=a+\tilde{t}} \sigma p_1(\tilde{a},t-\tilde{t})d\tilde{a}d\tilde{t}+\int_0^h\int_0^{+\infty} \psi(N(t+\tilde{t}))\beta_0(\tilde{a})\sum_{i=0}^{i=\infty} p_i(\tilde{a},t+\tilde{t})$$

mentre per $i>0$ vale

$$\int_0^{a+h} p_i(\tilde{a},t+h)d\tilde{a} =$$

$$= \int_{\tilde{a}=0}^{\tilde{a}=a} p_i(\tilde{a},t)d\tilde{a} - \int_{\tilde{t}=0}^{\tilde{t}=h}\int_{\tilde{a}=0}^{\tilde{a}=a+\tilde{t}} [\mu(\tilde{a})+\varphi(t)+i(\alpha+\sigma)]p_i(\tilde{a},t+\tilde{t})d\tilde{a}d\tilde{t}+$$

$$+\int_{\tilde{t}=0}^{\tilde{t}=h}\int_{\tilde{a}=0}^{\tilde{a}=a+\tilde{t}} \sigma(i+1)p_{i+1}(\tilde{a},t+\tilde{t})d\tilde{a}d\tilde{t}+\int_{\tilde{t}=0}^{\tilde{t}=h}\int_{\tilde{a}=0}^{\tilde{a}=a+\tilde{t}} \varphi(t)p_{i-1}(\tilde{a},t+\tilde{t})d\tilde{a}d\tilde{t}.$$

Derivando rispetto a h si ottiene

$$p_0(a+h,t+h)+\int_0^{a+h}\frac{\partial p_0}{\partial t}(\tilde{a},t+h)d\tilde{a} = -\int_0^{a+h}[\mu(\tilde{a})+\varphi(t)]p_0(\tilde{a},t+\tilde{t})d\tilde{a}+$$

$$+\sigma\int_0^{a+h} p_1(\tilde{a},t+h)d\tilde{a}+\int_0^{+\infty}\psi(N(t+h))\beta_0(\tilde{a})\sum_{j=0}^{j=+\infty} p_j(\tilde{a},t+h)d\tilde{a}$$

e ponendo $h=0$ si arriva a

$$p_0(a,t)+\int_0^a \frac{\partial p_0}{\partial t}(\tilde{a},t)d\tilde{a} =$$

$$= -\int_0^a [\mu(\tilde{a})+\varphi(t)]p_0(\tilde{a},t+\tilde{t})d\tilde{a}+\sigma\int_0^a p_1(\tilde{a},t)d\tilde{a}+$$

$$+\int_0^{+\infty}\psi(N(t))\beta_0(\tilde{a})\sum_{j=0}^{j=+\infty} p_j(\tilde{a},t)d\tilde{a}$$

e per $a=0$ si ha infine

$$p_0(0,t) = \psi(N(t))\int_0^{+\infty}\beta_0(\tilde{a})\sum_{j=0}^{j=+\infty} p_j(\tilde{a},t)d\tilde{a}.$$

Derivando rispetto ad a

$$\frac{\partial p_0}{\partial a}+\frac{\partial p_0}{\partial t}=-[\mu(a)+\varphi(a)]p_0(a,t)+\sigma p_1(a,t).$$

Per i restanti $i>0$ i conti sono analoghi, e danno

$$p_i(a+h,t+h)+\int_0^{a+h}\frac{\partial p_i}{\partial t}(\tilde{a},t+h)d\tilde{a}=$$

$$=-\int_{\tilde{a}=0}^{\tilde{a}=a+h}[\mu(\tilde{a})+\varphi(t)+i(\alpha+\sigma)]p_i(\tilde{a},t+h)d\tilde{a}+$$

$$+\sigma(i-1)\int_0^{a-h}p_{i-1}(\tilde{a},t+h)dat+\int_0^{a+h}\varphi(t)p_{i-1}(\tilde{a},t+h)d\tilde{a}.$$

Per $h=0$

$$p_i(a,t)+\int_0^a\frac{\partial p_i}{\partial t}(\tilde{a},t)d\tilde{a}=-\int_{\tilde{a}=0}^{\tilde{a}=a}[\mu(\tilde{a})+\varphi(t)+i(\alpha+\sigma)]p_i(\tilde{a},t)d\tilde{a}+$$

$$+\sigma(i-1)\int_0^a p_{i-1}(\tilde{a},t)dat+\int_0^a\varphi(t)p_{i-1}(\tilde{a},t)d\tilde{a}.$$

Ponendo $a=0$ si ha

$$p_i(0,t)=0.$$

Derivando rispetto ad a si ottiene

$$\frac{\partial p_i}{\partial a}(a,t)+\frac{\partial p_i}{\partial t}=-[\mu(a)+\varphi(t)+i(\alpha+\sigma)]p_i(a,t)+$$

$$+\sigma(i+1)p_{i+1}(a,t)+\varphi(t)p_{i-1}(a,t)$$

espressione che vale per $i\geq 0$ purché si ponga $p_{-1}=0$.

Si è insomma scritto il seguente modello

$$\begin{cases}\frac{\partial p_i}{\partial a}(a,t)+\frac{\partial p_i}{\partial t}(a,t)=-[\mu(a)-\varphi(t)+i(\alpha+\sigma)]p_i(a,t)+ & \\ +\sigma(i+1)p_{i+1}(a,t)+\varphi(t)p_{i-1}(a,t) & i\geq 0\\ p_0(0,t)=\psi(N(t))\int_0^{+\infty}\beta_0(\tilde{a})\sum_{j=0}^{j=+\infty}p_j(\tilde{a},t)d\tilde{a} & \\ p_i(0,t)=0 & i>0\\ p_i(a,0)=h_i(a) & i\geq 0\end{cases}\tag{5.1}$$

D'ora innanzi si assumerà per semplicità

$$\mu(a)=\mu \ \textit{costante reale positiva}$$

$$\beta_0(a)=\beta \ \textit{costante reale positiva}$$

e si pone $b=\beta\psi$.

5.3 Impostazione del problema di Cauchy astratto

Il modello scritto in forma di problema di Cauchy astratto è il seguente:

$$\begin{cases} p'(t) = Gp(t) \\ p(0) = p^0 \end{cases} \tag{5.2}$$

dove

$$X = \left\{ p = (p_i)_{i\in\mathbb{N}}, p_i \in L^1(0,\infty), \sum_{j=0}^{j=+\infty} j \int_0^\infty |p_j(a)|da < \infty \right\}$$

spazio di Banach con la norma

$$\|p\|_X = \int_0^\infty |p_0(a)|da + \sum_{i=1}^\infty i \int_0^\infty |p_i(a)|da.$$

L'operatore non lineare che descrive il problema è

$$[Gp]_i(a) = -p_i'(a) - [\mu + \varphi(p) + i(\alpha+\sigma)]p_i(a) + \sigma(i+1)p_{i+1}(a) + \varphi(p)p_{i-1}(a)$$

con

$$\varphi(p) = \frac{h\sum_1^\infty i\int_0^\infty p_i(a)da}{c + \sum_0^\infty \int_0^\infty p_i(a)da}.$$

G è un operatore non lineare che si vuole esprimere in questa forma:

$$G = \bar{A}[I + H] + F.$$

dove $\bar{A}$ è la chiusura dell'operatore lineare definito da

$$[Ap]_i(a) = -p_i'(a) - [\mu - i(\alpha - \sigma)]p_i(a) + (i+1)\sigma p_{i+1}(a)$$

con dominio

$$\mathcal{D}(A) = \{p \in X, p_i \in W^{1,1}([0,\infty[), p_i(0) = 0 \ i \geq 0, \exists N \ t.c. \ p_i = 0 \ i > N\},$$

mentre

$$[Fp]_0(a) = -\frac{h\sum_1^\infty i\int_0^\infty p_i(a)da}{c + \sum_0^\infty \int_0^\infty p_i(a)da} p_0(a)$$

$$[Fp]_i(a) = \frac{h\sum_1^\infty i\int_0^\infty p_i(a)da}{c + \sum_0^\infty \int_0^\infty p_i(a)da}[p_{i-1}(a) - p_i(a)],$$

definito dove il denominatore non si annulla, i.e. su $\{p \in X, c + \sum_0^\infty \int_0^\infty p_i(s)ds \neq 0\}$, e infine

$$[Hp]_0(a) = -b\left[\sum_0^\infty \int_0^\infty p_i(s)ds\right]\left(\sum_0^\infty \int_0^\infty p_i(s)ds\right)e^{-\mu a}$$

$$[Hp]_i(a) = 0 \ i > 0.$$

Poiché il problema di Cauchy 5.2 ha esistenza ed unicità di soluzione e dipendenza continua dal dato iniziale per un opportuno insieme di dati iniziali (vedi [6]), ad esso resta associato un semigruppo non lineare $(T_t)_{t\in[0,+\infty[}$.

5.4 Punti di equilibrio

Un punto di equilibrio per

$$p'(t) = A[I + H]p(t) + Fp(t)$$

è un $p^* \in X$ tale che

$$p^* = e^{tA}p^* + A\int_0^t e^{sA}Hp^* ds + \int_0^t e^{sA}Fp^* ds$$

il che equivale a

$$\begin{cases} p^* + Hp^* \in \mathcal{D}(A) \\ A[I + H]p^* + Fp^* = 0 \end{cases}$$

(si veda [6], pagina 27).
Sia $H'(p^*)$ la derivata di Fréchet di H in p^*, i.e. l'operatore lineare e continuo di X in X t.c.

$$\lim_{p \to p^*} \frac{\|H(p) - H(p^*) - H'(p^*)(p - p^*)\|}{\|p - p^*\|} = 0$$

e idem per $F'(p^*)$.
Ora $B_{p^*} = A[I + H'(p^*)] + F'(p^*)$ è un operatore lineare che genera un semigruppo fortemente continuo. È vero di piú: $e^{tB_{p^*}}$ è la derivata di Fréchet di T_t in p^*, i.e.

$$e^{tB_{p^*}} = T_t'(p^*)$$

nel senso che

$$\lim_{p \to p^*} \frac{\|T_tp - T_tp^* - e^{tB_{p^*}}(p - p^*)\|}{\|p - p^*\|} = 0 \quad \forall t \geq 0$$

5.5 Una soluzione stazionaria

Se esiste K tale che $\psi(K) = \frac{\mu}{\beta}$, i.e. se $\mu < \beta$ per le proprietà di ψ, allora una soluzione stazionaria del problema 5.1 relativa a $\varphi = 0$ è data da:

$$\bar{p}(a) = \left(\mu K e^{-\mu a}, 0, 0, ...\right)$$

Lo si verifica facilmente:

$$\bar{p}_0'(a) = -\mu^2 K e^{-\mu a} = -\mu\bar{p}_0(a)$$

$$\bar{p}_0(0) = \mu K \stackrel{?}{=} \psi(K)\beta K$$

Sí, perché $\psi(K) = \frac{\mu}{\beta}$.
K è la capacità portante (in assenza di parassiti non c'è crescita esponenziale).
Questa soluzione è detta "equilibrio senza parassiti".

5.6 Linearizzazione intorno all'equilibrio senza parassiti

Il caso che verrà preso in esame è quello in cui $p^* = \bar{p}$.
Qui $H'(\bar{p}) = \tilde{H}$ e $F'(\bar{p}) = \tilde{F}$ si calcolano esplicitamente.
Sia $B = A[I + \tilde{H}] + \tilde{F}$. Si verifica in [6] che

$$[\tilde{H}u](a) = \left(-C\sum_{i=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u_i(s)ds\exp(-\mu a), 0, 0, ...\right) \tag{5.3}$$

dove $C = (b'(K)K + b(K))$.
$\tilde{H} \in \mathcal{B}(X)$.
Poi,

$$[\tilde{F}u]_0(a) = -[\tilde{F}u]_1(a) = -\frac{hK}{c+K}\sum_{i=1}^{+\infty} i\int_0^{+\infty} u_i(s)ds\mu\exp(-\mu a) \tag{5.4}$$

$$[\tilde{F}u]_i(a) = 0 \; per \; i \geq 2.$$

L'operatore B può ora essere scritto come la matrice infinita

$$B = \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} \\ 0 & B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix}$$

dove

$$B_{00}q_0(a) = -q_0'(a) - \mu q_0(a)$$

$$B_{11}q_1(a) = -q_1'(a) - [\mu + \sigma + \alpha]q_1(a) + \frac{hK}{c+K}\mu e^{-\mu a}\int_0^{\infty} q_1(s)ds$$

$$[B_2\tilde{q}]_i(a) = -q_i'(a) - [\mu + i(\alpha + \sigma)]q_i(a) + \sigma(i+1)q_{i+1}(a)$$

con dominî

$$\mathcal{D}(B_{00}) = \{q_0 \in W^{1,1}([0, -\infty[), q_0(0) = C\int_0^{\infty} q_0(s)ds\}$$

$$\mathcal{D}(B_{11}) = \{q_1 \in W^{1,1}([0, +\infty[), q_1(0) = 0\}$$

$$\mathcal{D}(B_2) = \{\tilde{q} = (q_i(a))_{i\geq 2}, q_i \in W^{1,1}([0, +\infty[), q_i(0) = 0 \; i \geq 2\}$$

e ancora

$$B_{01}q_1(a) = -\frac{hK}{c+K}\mu\int_0^{\infty} q_1(s)dse^{-\mu a} + \sigma q_1(a)$$

$$B_{02}\tilde{q}(a) = -\frac{hK\sum_2^{\infty} i\int_0^{\infty} q_i(s)ds}{c+K}\mu e^{-\mu a}$$

$$B_{12}\tilde{q}(a) = \frac{hK\sum_2^{\infty} i\int_0^{\infty} q_i(s)ds}{c+K}\mu e^{-\mu a} + 2\sigma q_2(a).$$

Lo studio degli spettri degli elementi sulla diagonale darà indicazioni su come è fatto lo spettro dell'operatore B.

Capitolo 6

A.E.G. NEL MODELLO LINEARIZZATO

Si vuole provare la crescita esponenziale asincrona in questo modello utilizzando il teorema fondamentale nella forma debole, i.e. andando a soddisfare le ipotesi del teorema 2.4.

6.1 Risolvente di B_{00}

L'operatore B_{00} è cosí definito:

$$B_{00}q_0(a) = -q_0'(a) - \mu q_0(a)$$

con

$$\mathcal{D}(B_{00}) = \left\{ q_0 \in W^{1,1}([0,+\infty[), q_0(0) = C\int_0^\infty q_0(s)ds \right\}.$$

Si vuole calcolare esplicitamente $R[\lambda, B_{00}]$, i.e. supporre $\lambda \in \rho(B_{00})$ e vedere quali condizioni necessarie valgono.
Sia $r \in L^1$.

$$[B_{00} - \lambda]q_0(a) = r(a)$$
$$-q_0'(a) - [\lambda + \mu]q_0(a) - r(a) = 0$$
$$q_0'(a) = -[\lambda + \mu]q_0(a) - r(a)$$

da cui, integrando,

$$q_0(a) = q_0(0)e^{-(\lambda+\mu)a} - \int_0^a e^{-(\lambda+\mu)(a-s)}r(s)ds.$$

Siccome q_0 deve appartenere a $\mathcal{D}(B_{00})$, si deve avere che

$$q_0(a) = C\int_0^\infty q_0(s)ds e^{-(\lambda+\mu)a} - \int_0^a e^{-(\lambda+\mu)(a-s)}r(s)ds.$$

Si può scrivere una formulazione esplicita per $\int_0^\infty q_0(a)da$, integrando:

$$\int_0^\infty q_0(s)ds = C\int_0^\infty q_0(s)ds\int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)a}da - \int_0^\infty\int_0^a e^{-(\lambda+\mu)(a-s)}r(s)dsda$$

$$\int_0^\infty q_0(s)ds = C\int_0^{+\infty} q_0(s)ds\frac{1}{\lambda+\mu} - \int_{s=0}^{s=\infty}\int_{a=s}^{a=\infty} e^{-(\lambda+\mu)a}e^{(\lambda+\mu)s}r(s)dads =$$

$$= C\int_0^{+\infty} q_0(s)ds\frac{1}{\lambda+\mu} - \int_0^{+\infty} e^{(\lambda+\mu)s}r(s)\frac{1}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)s}ds =$$

$$= \frac{C}{\lambda+\mu}\int_0^{+\infty} q_0(s)ds - \frac{1}{\lambda+\mu}\int_0^{+\infty} r(s)ds$$

da cui si ricava

$$\int_0^{+\infty} q_0(s)ds = -\frac{\frac{1}{\lambda+\mu}}{1-\frac{C}{\lambda+\mu}}\int_0^{+\infty} r(s)ds =$$

$$= -\frac{\frac{1}{\lambda+\mu}}{\frac{\lambda+\mu-C}{\lambda+\mu}}\int_0^{+\infty} r(s)ds =$$

$$= \frac{1}{-\lambda+C-\mu}\int_0^{+\infty} r(s)ds$$

conti che hanno senso se $Re(\lambda) > -\mu, \lambda \neq C-\mu$.
Quindi q_0 deve necessariamente essere

$$q_0(a) = \frac{C\int_0^{+\infty} r(s)ds}{-\lambda+C-\mu}e^{-(\lambda+\mu)a} - \int_0^a e^{-(\lambda+\mu)(a-s)}r(s)ds.$$

È facile verificare che $\forall r \in L^1$ e per $Re(\lambda) > -\mu, \lambda \neq C-\mu$ la $q_0(a)$ così definita soddisfa

$$[B_{00} - \lambda]q_0(a) = r(a).$$

Una stima della norma di q_0 porta a dire che

$$\|(B_{00}-\lambda)^{-1}r\| \leq \|r\|\frac{1}{|\lambda+\mu|}\left[\frac{|C|}{|\lambda-(C-\mu)|}+1\right]$$

e quindi che

$$\sigma(B_{00}) \subseteq \{Re(z) \leq -\mu\} \cup \{C-\mu\}.$$

Che cosa succede per $\lambda \leq -\mu$?

$$[B_{00} - \lambda]q_0(a) = 0$$

$$-q_0'(a) - [\lambda+\mu]q_0(a) = 0$$

Integrando deve essere

$$q_0(a) = q_0(0)e^{-(\lambda-\mu)a} = C\int_0^{\infty} q_0(s)ds e^{-(\lambda+\mu)a}$$

Ora, deve valere $\lim_{a\to-\infty} q_0(a) = 0$, per cui

$$\lim_{a\to+\infty} C\int_0^{\infty} q_0(s)dse^{-(\lambda+\mu)a} = 0$$

ma siccome $-(\lambda+\mu) \geq 0$ si ha $e^{-(\lambda+\mu)} \geq 1$, per cui deve per forza essere $C\int_0^{\infty} q_0(s)ds = 0$, il che implica

$$q_0(a) = 0.$$

Quindi $[B_{00} - \lambda]$ è iniettiva. Ciò prova che non possono esservi autovalori all'infuori di $C - \mu$.

$C - \mu$ è un polo di ordine uno del risolvente, e pertanto, se esso sta alla destra di $-\mu$, è certamente un autovalore con molteplicità algebrica e geometrica pari a uno, come si ricava da 1.53. Il suo autospazio si può calcolare esplicitamente:

$$B_{00}q_0 = (C-\mu)q_0$$

$$-q_0'(a) - \mu q_0(a) = Cq_0(a) - \mu q_0(a)$$

$$q_0'(a) = -Cq_0(a)$$

che integrato dà

$$q_0(a) = Ee^{-Ca}, E \in \mathbb{C}.$$

In effetti:

$$\int_0^{+\infty} Ee^{-Ca}da = E\frac{1}{C} < +\infty$$

$$\int_0^{+\infty} q_0'(a)da = E(-C)\frac{1}{C} = -E < \infty$$

e infine

$$q_0(0) = E = C\int_0^{-\infty} q_0(s)ds.$$

Quindi l'autospazio esplicitamente calcolato è

$$\{E\exp(-Ca), E \in \mathbb{C}\}.$$

In definitiva,

$$\sigma_p(B_{00}) \subseteq \{C - \mu\}$$

nel senso che $\sigma_p = \{C-\mu\}$ se $C > 0$, mentre se $C \leq 0$ si ha che $C - \mu \leq -\mu$ e quindi $C - \mu$ non è più un autovalore, essendo $B_{00} - (C - \mu)$ iniettivo. Il restante spettro è contenuto nel semipiano $\{Re(z) \leq -\mu\}$.

6.2 Risolvente di B_{11}

Come si è detto

$$B_{11}q_1(a) = -q_1'(a) - [\mu + \sigma + \alpha]q_1(a) + \frac{hK}{c+K}\mu e^{-\mu a} \int_0^\infty q_1(w)dw$$

e ha dominio

$$\mathcal{D}(B_{11}) = \{\varphi \in W^{1,1}(0,\infty) : \varphi(0) = 0\}.$$

Sia λ un numero complesso, e sia $r \in L^1(0,\infty)$. Si cerca $q_1 \in \mathcal{D}(B_{11})$ tale che

$$[B_{11} - \lambda]q_1 = r.$$

L'intento è scrivere esplicitamente $R[\lambda, B_{11}] = [B_{11} - \lambda]^{-1}$ e vedere per quali λ esso è un operatore lineare e limitato, e per quali no.

$$[B_{11} - \lambda]q_1(a) = r(a)$$

dà

$$-q_1'(a) - [\lambda + \mu + \sigma + \alpha]q_1(a) + \frac{hK}{c+K}\mu e^{-\mu a} \int_0^\infty q_1(w)dw = r(a)$$

da cui

$$q_1'(a) = -[\lambda + \mu + \sigma + \alpha]q_1(a) + \frac{hK}{c+K}\mu e^{-\mu a} \int_0^\infty q_1(w)dw - r(a)$$

Integrando (si usa la formula di variazione delle costanti) si ottiene

$$q_1(a) = q_1(0)e^{-[\lambda+\mu+\alpha+\sigma]a} + \int_0^a \frac{hK}{c+K}\mu e^{-(\lambda+\mu+\alpha+\sigma)(a-s)} e^{-\mu s} ds \int_0^\infty q_1(w)dw -$$

$$- \int_0^a e^{-(\lambda+\mu+\alpha+\sigma)(a-s)} r(s)ds.$$

Ora, siccome q_1 deve appartenere al dominio di B_{11}, $q_1(0) = 0$, da cui

$$q_1(a) = \frac{hK}{c+K}\mu \int_0^a e^{-(\lambda+\mu+\alpha+\sigma)(a-s)} e^{-\mu s} ds \int_0^\infty q_1(w)dw -$$

$$- \int_0^a e^{-(\lambda+\mu+\alpha+\sigma)(a-s)} r(s)ds.$$

Si può ricavare una formulazione di $\int_0^\infty q_1(w)dw$ in funzione di r, integrando:

$$\int_0^\infty q_1(a)da = \frac{hK}{c+K}\mu \int_{a=0}^{a=\infty} \int_{s=0}^{s=a} e^{-(\lambda+\mu+\alpha+\sigma)(a-s)} e^{-\mu s} dsda \int_0^\infty q_1(w)dw -$$

$$- \int_{a=0}^{a=\infty} \int_{s=0}^{s=a} e^{-(\lambda+\mu+\alpha+\sigma)(a-s)} r(s)dsda =$$

$$= \frac{hK}{c+K}\mu \int_{s=0}^{s=\infty} \int_{a=s}^{a=\infty} e^{-(\lambda+\mu+\alpha-\sigma)a} da e^{(\lambda-\mu-\alpha+\sigma)s} e^{-\mu s} ds \int_0^\infty q_1(w)dw -$$

$$- \int_{s=0}^{s=\infty} \int_{a=s}^{a=\infty} e^{-(\lambda+\mu+\alpha+\sigma)a} da e^{(\lambda-\mu+\alpha+\sigma)s} r(s) ds =$$

$$= \frac{hK}{c+K} \int_0^\infty q_1(w)dw \mu \int_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{\lambda+\mu+\alpha+\sigma} e^{-(\lambda+\mu+\alpha+\sigma)s} e^{(\lambda+\mu+\alpha+\sigma)s} e^{-\mu s} ds -$$

$$- \int_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{\lambda+\mu-\alpha+\sigma} e^{-(\lambda+\mu-\alpha+\sigma)s} e^{(\lambda-\mu-\alpha+\sigma)s} r(s) ds =$$

$$= \frac{hK}{c+K} \int_0^\infty q_1(w)dw \mu \frac{1}{\lambda+\mu+\alpha+\sigma}\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda-\mu+\alpha+\sigma} \int_{s=0}^{s=\infty} r(s)ds =$$

(che ha senso scrivere per $Re(\lambda) > -[\mu-\alpha+\sigma]$)

$$= \frac{hK}{c+K} \int_0^\infty q_1(w)dw \frac{1}{\lambda+\mu+\alpha+\sigma} - \frac{1}{\lambda+\mu+\alpha+\sigma} \int_{s=0}^{s=\infty} r(s)ds.$$

Ora,

$$\int_0^\infty q_1(a)da \times \left[1 - \frac{hK}{c+K}\frac{1}{\lambda+\mu+\alpha+\sigma}\right] = -\frac{1}{\lambda+\mu+\alpha+\sigma}\int_0^\infty r(a)da,$$

$$\int_0^\infty q_1(a)da = -\frac{1}{-\frac{hK}{c+K}\frac{1}{\lambda-\mu+\alpha+\sigma}} \times \frac{\int_0^\infty r(a)da}{\lambda+\mu+\alpha+\sigma} =$$

$$= \frac{1}{-\lambda+\frac{hK}{c-K}-(\mu+\alpha+\sigma)} \times \int_0^\infty r(a)da$$

cosa che si può scrivere per $\lambda \neq \frac{hK}{c+K} - (\mu+\alpha+\sigma) = \bar{\lambda}$.

Insomma, deve necessariamente essere

$$q_1(a) = \frac{hK}{c+K}\mu \int_0^\infty r(s)ds \frac{1}{-\lambda+\frac{hK}{c+K}-(\mu+\alpha+\sigma)} \int_0^a e^{-(\lambda-\mu-\alpha+\sigma)(a-s)} e^{-\mu s} ds -$$

$$- \int_0^a e^{-(\lambda+\mu-\alpha+\sigma)(a-s)} r(s) ds.$$

È chiaro che q_1 appartiene a $\mathcal{D}(B_{11})$.
È facile verificare che per $Re(\lambda) > -(\mu+\alpha+\sigma), \lambda \neq \frac{hK}{c+K} - (\mu+\alpha+\sigma)$ si ha $[B_{11}-\lambda]q_1 = r$.

Si ha quindi che il risolvente ha questa formulazione:

$$R[\lambda, B_{11}]r(a) = \frac{hK}{c+K}\mu \int_0^\infty r(s)ds \frac{1}{-\lambda+\frac{hK}{c+K}-(\mu+\alpha+\sigma)} \times$$

$$\times \int_0^a e^{-(\lambda-\mu+\alpha+\sigma)(a-s)} e^{-\mu s} ds - \int_0^a e^{-(\lambda-\mu+\alpha+\sigma)(a-s)} r(s) ds.$$

Una stima della sua norma dà:

$$\|[B_{11}-\lambda]^{-1}r\| \leq$$

$$\leq \|r\|\frac{1}{|\lambda-\mu+\alpha+\sigma|}\left[\frac{hK}{c+K}\mu \times \frac{1}{|-\lambda+\frac{hK}{c-K}-(\mu+\alpha+\sigma)|} \times \frac{1}{\mu}+1\right].$$

È cosí provato che $\sigma(B_{11}) \subseteq \{Re(z) \leq -(\mu+\alpha+\sigma)\} \cup \{\frac{hK}{c+K}-(\mu+\alpha+\sigma)\}$. Dalla formula che dà il risolvente si vede che $\frac{hK}{c+K}-(\mu-\alpha+\sigma)$ è un polo di ordine uno, e pertanto un autovalore di molteplicità algebrica e geometrica uno. Il suo autospazio è calcolato esplicitamente in [6] e risulta

$$ker[B_{11}-\frac{hK}{c+K}-(\mu+\alpha+\sigma)] =$$

$$= \left\{E\frac{hK}{c+K}\mu\int_0^a e^{-\mu s}e^{-(\lambda+\mu+\alpha+\sigma)(a-s)}ds, E \in \mathbb{R}\right\}.$$

Insomma lo spettro di B_{11} certamente contiene un autovalore $\frac{hK}{c+K}-(\mu+\alpha+\sigma)$; il restante spettro sta nel semipiano $Re(z) \leq -(\mu+\alpha+\sigma)$.

$$\sigma(B_{11}) \subseteq \{Re(z) \leq -(\mu+\alpha+\sigma)\} \cup \left\{\frac{hK}{c+K}-(\mu+\alpha+\sigma)\right\}$$

$$\sigma_p(B_{11}) \subseteq \left\{\frac{hK}{c+K}-(\mu+\alpha+\sigma)\right\}.$$

Mentre $-(\mu+\alpha+\sigma)$ è certamente negativa, $\frac{hK}{c+K}-(\mu+\alpha+\sigma)$ non si sa che segno abbia, ma i due punti sono certamente distinti, essendo $\frac{hK}{c+K}>0$.

6.3 Inclusioni di spettri

Si vuol provare che

$$\sigma(B) \subseteq \sigma(B_{00}) \cup \sigma(B_{11}) \cup \sigma(B_2)$$

o, equivalentemente, che

$$\lambda \in \rho(B_{00}) \cap \rho(B_{11}) \cap \rho(B_2) \Longrightarrow \lambda \in \rho(B).$$

Ciò vuol dire che

$$\forall f = (f_0, f_1, \tilde{f}) \in L^1 \times L^1 \times ...$$

se $\lambda \in \rho(B_{00}) \cap \rho(B_{11}) \cap \sigma(B_2)$ allora

$$\exists! u = (u_0, u_1, \tilde{u}) \in \mathcal{D}(B)$$

tale che

$$[B-\lambda]u = f.$$

Altrimenti scritto

$$[B-\lambda]u = \begin{bmatrix} B_{00}-\lambda & B_{01} & B_{02} \\ 0 & B_{11}-\lambda & B_{12} \\ 0 & 0 & B_2-\lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \tilde{u} \end{pmatrix} =$$

$$= [B-\lambda]u = \begin{bmatrix} B_{00}u_0 - \lambda u_0 + B_{01}u_1 + B_{02}\tilde{u} \\ B_{11}u_1 - \lambda u_1 + B_{12}\tilde{u} \\ B_2\tilde{u} - \lambda\tilde{u} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \tilde{f} \end{pmatrix}$$

o ancora

$$\begin{cases} B_{00}u_0 - \lambda u_0 + B_{01}u_1 + B_{02}\tilde{u} = f_0 \\ B_{11}u_1 - \lambda u_1 + B_{12}\tilde{u} = f_1 \\ B_2\tilde{u} - \lambda\tilde{u} = \tilde{f} \end{cases}$$

Dall'ultima equazione si ottiene $\tilde{u}$, cosí:

$$\tilde{u} = R[\lambda, B_2]\tilde{f}$$

visto che $\lambda \in \rho(B_2)$.
La seconda diventa ora:

$$B_{11}u_1 - \lambda u_1 = f_1 - B_{12}\tilde{u}$$

che ha soluzione

$$u_1 = R[\lambda, B_{11}](f_1 - B_{12}\tilde{u})$$

visto che λ sta nel risolvente di B_{12}.
Ancora

$$B_{00}u_0 - \lambda u_0 = f_0 - B_{01}u_1 - B_{02}\tilde{u}$$

ha soluzione

$$u_0 = R[\lambda, B_{00}](f_0 - B_{01}u_1 - B_{02}\tilde{u})$$

poiché $\lambda \in \rho(B_{00})$.

Ciò che è cosí stato provato è che, se la soluzione esiste, essa è unica, e la si può scrivere tramite i risolventi di B_{00}, B_{11}, B_2. Ciò che rimane da provare è che

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \tilde{u} \end{pmatrix}$$

appartiene a $\mathcal{D}(B)$.
A tal fine verranno un po' cambiate le notazioni.
Lo spazio X viene scritto come somma diretta di spazî $L^1(0,\infty)$, in questo modo

$$X = X_0 \oplus X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots$$

dove ogni $X_i = L^1$. La notazione $u = (u_0, \bar{u}_1)$ significherà che $\bar{u}_1 = (u_1, u_2, u_3, ...)$. Pertanto, $\bar{u} = (u_1, \bar{u})$. Per evitare di mettere tanti segni sopra le lettere si scriverà $B = A[I + H] + F$.

$$B\begin{pmatrix} u_0 \\ \bar{u}_1 \end{pmatrix} = A[I+H]\begin{pmatrix} u_0 \\ \bar{u}_1 \end{pmatrix} + F\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_0[u_0 + H_0 u_0 + H_1 \bar{u}_1] + F_0 \bar{u}_1 \\ A_1 \bar{u}_1 \end{bmatrix}$$

con questi significati: I_0 è l'identità di X_0 in X_0, I_1 è l'identità di $X_1 \oplus X_2 \oplus ...$ in se stesso,

$$A_0 : \mathcal{D}(A_0) \longrightarrow X_0$$

$$q_0 \longmapsto -q_0' - \mu q_0$$

con

$$\mathcal{D}(A_0) = \{q_0 \in X_0 : q_0(0) = 0\}$$

$$H_0 : X_0 \longrightarrow X_0$$

$$q_0 \longmapsto -Ce^{-\mu a}\int_0^\infty q_0(s)ds$$

mentre

$$H_1 : X_1 \oplus X_2 \oplus ... \longrightarrow X_0$$

$$\bar{q_1} \longmapsto -Ce^{-\mu a}\sum_{i=1}^\infty \int_0^\infty q_i(s)ds.$$

Infine

$$F_0 : X_1 \oplus X_2 \oplus ... \longrightarrow X_0$$

$$\bar{u}_1 \longmapsto -\frac{hK}{c+K}\mu e^{-\mu a}\sum_{i=1}^\infty i\int_0^\infty u_i(s)ds$$

e

$$F_1 : X_1 \oplus X_2 \oplus ... \longrightarrow X_1$$

$$\bar{u}_1 \longmapsto \frac{hK}{c+K}\mu e^{-\mu a}\sum_{i=1}^\infty i\int_0^\infty u_1(s)ds.$$

Con queste notazioni risulta

$$A_1 = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Ciò che si vuole provare è che

$$\lambda \in \rho[A_0(I + H_0)] \cap \rho(A_1) \Longrightarrow \lambda \in \rho(B)$$

stante che $B_{00} = A_0(I_0 + H_0)$ e $\lambda \in \rho(B_{11}) \cap \rho(B_2) \implies \lambda \in \rho(A_1)$. Quest'ultima è chiara: da come sono state scritte u_1 e $\tilde{u}$ nell'equazione

$$[B - \lambda](u_0, u_1, \tilde{u}) = (v_0, v_1, \tilde{v})$$

esse appartengono rispettivamente ai dominî di B_{11} e B_2, vale cioè $u_i \in W^{1,1}([0, +\infty[)$ per $i > 0$ e $u_i(0) = 0$ (sempre per $i > 0$), il che equivale a dire che $\bar{u}_1 = (u_1, \tilde{u})$ appartiene a $\mathcal{D}(A_1)$.
Ora, preso un qualunque $v \in L^1(0, \infty)$, si cerca l'unico $\begin{pmatrix} u_0 \\ \bar{u}_1 \end{pmatrix}$ tale che

$$[\lambda - B]\begin{pmatrix} u_0 \\ \bar{u}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ \bar{v}_1 \end{pmatrix}.$$

Siccome si è scelto di usare come definizione di operatore risolvente $[B - \lambda]^{-1}$ invece che $[\lambda - B]^{-1}$, alla fine bisognerà cambiare il segno all'u trovato perché sia $u = R[\lambda, B]v$.

$$\begin{cases} \lambda u_0 - A_0[u_0 + H_0 u_0 + H_1 \bar{u}_1] - F_0 \bar{u}_1 = v_0 \\ \lambda \bar{u}_1 - A_1 \bar{u}_1 = v_1 \end{cases}$$

Si ha allora

$$\bar{u}_1 = [\lambda - A_1]^{-1} \bar{v}_1. \tag{6.1}$$

Ponendo

$$v_0 + F_0(\lambda - A_1)^{-1} \bar{v}_1 = w_0$$

si può scrivere

$$\lambda u_0 - A_0[u_0 + H_0 u_0 + H_1 u_1] = w_0.$$

Stante 6.1

$$\lambda u_0 - A_0[(I + H_0)u_0 + (I + H_0)(I + H_0)^{-1} H_1(\lambda - A_1)^{-1} v_1] = w_0$$

avendo anche moltiplicato per $(I + H_0)(I + H_0)^{-1} = I$ un termine. Aggiungendo e togliendo la stessa quantità

$$\lambda[u_0 + (I + H_0)^{-1} H_1(\lambda - A_1)^{-1} \bar{v}_1] - A_0[(I + H_0)u_0 +$$

$$+(I + H_0)(I + H_0)^{-1} H_1(\lambda - A_1)^{-1} \bar{v}_1] = w_0 - \lambda(I + H_0)^{-1} H_1(\lambda - A_1)^{-1} \bar{v}_1.$$

Raccogliendo

$$[\lambda - A_0(I + H_0)][u_0 + (I + H_0)^{-1} H_1(\lambda - A_1)^{-1} \bar{v}_1] =$$

$$= w_0 + \lambda(I + H_0)^{-1} H_1(\lambda - A_1)^{-1} \bar{v}_1.$$

Da questo si scrive

$$u_0 = [\lambda - A_0(I + H_0)]^{-1}[w_0 + \lambda(I + H_0)^{-1} H_1(\lambda - A_1)^{-1} \bar{v}_1] -$$

$$-(I + H_0)^{-1} H_1 (\lambda - A_1)^{-1} \bar{v}_1$$

Ora si può scrivere

$$\begin{aligned}
&u + 0 + H_0 u_0 + H_1 \bar{u}_1 = \\
&= [\lambda - A_0(I - H_0)]^{-1}[w_0 + \lambda(I + H_0)^{-1} H_1(\lambda - A_1)^{-1}\bar{v}_1] - \\
&-(I + H_0)^{-1} H_1(\lambda - A_1)^{-1}\bar{v}_1 + H_0[[\lambda - A_0(I + H_0)]^{-1}[w_0 + \\
&+\lambda(I + H_0)^{-1} H_1(\lambda - A_1)^{-1}\bar{v}_1] - (I + H_0)^{-1} H_1(\lambda - A_1)^{-1}\bar{v}_1] + H_1\bar{u}_1 = \\
&= [I + H_0][\lambda - A_0(I + H_0)]^{-1}[w_0 + \lambda(I + H_0)^{-1} H_1(\lambda - A_1)^{-1}\bar{v}_1] - \\
&-(I + H_0)(I + H_0)^{-1} H_1(\lambda - A_1)^{-1}\bar{v}_1 + H_1\bar{v}_1 = \\
&= [I + H_0][\lambda - A_0(I + H_0)]^{-1}[w_0 + \\
&+\lambda(I + H_0)^{-1} H_1(\lambda - A_1)^{-1}\bar{v}_1] - H_1(\lambda - A_1)^{-1}\bar{v}_1 + H_1\bar{u}_1 = \\
&= [I + H_0][\lambda - A_0(I + H_0)]^{-1}[w_0 + \\
&+\lambda(I + H_0)^{-1} H_1(\lambda - A_1)^{-1}\bar{v}_1].
\end{aligned}$$

Ora,

$$[\lambda - A_0(I + H_0)]^{-1}[w_0 + \lambda(I + H_0)^{-1} H_1(\lambda - A_1)^{-1}\bar{v}_1] \in \mathcal{D}(A_0(I + H_0)) \tag{6.2}$$

poiché λ appartiene a $\rho(A_0(I + H_0))$, e infine 6.2 appartiene allora a $\mathcal{D}(A_0)$, che era ciò che si voleva provare.

Resta un'ultima lacuna in questa prova: bisogna fare vedere che effettivamente $I + H_0$ è invertibile di X_0 in X_0, i.e. quale che sia f_0 appartenente a L^1, esiste un unico q_0 appartenente a L^1 tale che

$$(I - H_0)q_0 = f_0.$$

Lo si esplicita:

$$q_0(a) - Ce^{-\mu a}\int_0^\infty q_0(s)ds = f_0(a)$$

$$\int_0^\infty q_0(s)ds - C\int_0^{+\infty} q_0(s)ds \times \frac{1}{\mu} = \int_0^{+\infty} f_0(s)ds$$

$$\int_0^{+\infty} q_0(s)ds\left[1 - \frac{C}{\mu}\right] = \int_0^{+\infty} f_0(s)ds$$

da cui

$$\int_0^{+\infty} q_0(s)ds = \int_0^{+\infty} f_0(s)ds \times \frac{1}{1 - C/\mu}$$

$$q_0(a) = f_0(a) + \frac{C}{1 - \frac{C}{\mu}} e^{-\mu a}\int_0^{+\infty} f_0(s)ds. \tag{6.3}$$

È ora facile verificare che

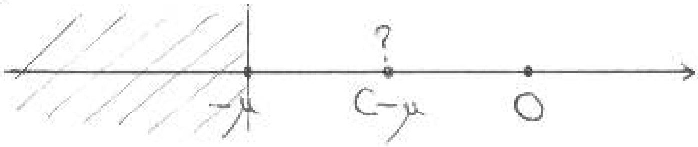
$$q_0(a)(I + H_0)f(a) = (I + H_0)(I + H_0)^{-1} f(a) = f(a)$$

dove $q_0(a)$ è dato dalla 6.3, ed è quindi $(I + H_0)^{-1}$.

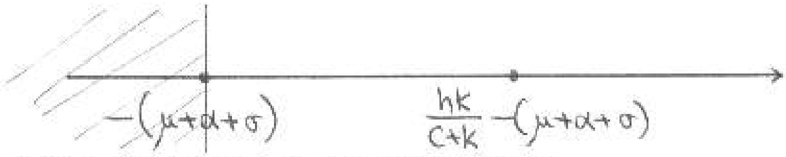
6.4 Conclusioni

Fino ad ora si sanno queste cose:

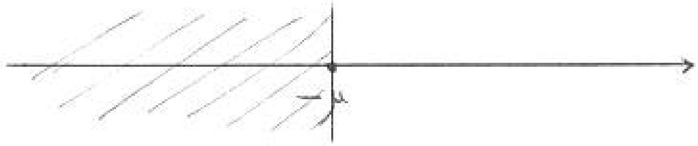
- $\sigma(B_{00}) \subseteq \{Re(z) \leq -\mu\} \cup \{C-\mu\}$
- $\sigma_p(B_{00}) = \{C-\mu\}$ se $C-\mu > -\mu$, ovvero se $C > 0$, $\sigma_p(B_{00}) = \emptyset$ se $C \leq 0$



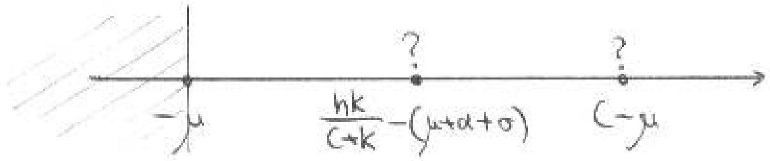
- $\sigma(B_{11}) \subseteq \{Re(z) \leq -(\mu+\alpha+\sigma)\} \cup \{\frac{hK}{c+K} - (\mu+\alpha+\sigma)\}$
- $\frac{hK}{c-K} - (\mu+\alpha+\sigma) \in \sigma_p(B_{11})$



- $\sigma(B_2) \subseteq \{Re(z) \leq -\mu\}$, come si prova in [6]



- $\sigma(B) \subseteq \sigma(B_{00}) \cup \sigma(B_{11}) \cup \sigma(B_2) \subseteq \{Re(z) \leq -\mu\} \cup \{C-\mu\} \cup \left\{\frac{hK}{c+K} - (\mu-\alpha+\sigma)\right\}$



Ci sono quindi delle buone indicazioni su dove andare a cercare gli autovalori dell'operatore B.

6.5 Elementi dello spettro di B

Si vuole provare che $C-\mu$ (per $C>0$) e $\frac{hK}{c+K} - (\mu+\alpha+\sigma)$ appartengono allo spettro di B, e che essi sono autovalori di moleplicità algebrica uno, cosí come lo sono per B_{00} e per B_{11}.
Si suppone per il momento che $\frac{hK}{c+K} - (\mu+\alpha+\sigma)$ sia diverso da $C-\mu$, equivalente a dire che $h \neq \frac{(C-\alpha+\sigma)(c+K)}{K}$, e che $\frac{hK}{c-K} - (\mu+\alpha+\sigma) > -\mu$.

6.5.1 $C - \mu \in \sigma_p(B)$

Va provato che $ker[B - (C - \mu)]$ non è ridotto a $\{0\}$.

$$[B - (C - \mu)]q = 0$$

Da

$$[B_2 - (C - \mu)]\tilde{q} = 0$$

si ha che $\tilde{q} = 0$, poiché $C - \mu$ non è un autovalore di B_2, dato che $\omega_0(B_2) \leq -\mu < C - \mu$.
Da

$$[B_{11} - (C - \mu)]q_1 + B_{12}\tilde{q} = [B_{11} - (C - \mu)]q_1 = 0$$

$u_1 = 0$, poiché $C - \mu$ non è autovalore di B_{11}, in virtú dell'ipotesi per cui $\frac{hK}{c+K} - (\mu + \alpha + \sigma) \neq C - \mu$.
Infine, da

$$[B_{00} - (C - \mu)]q_0 + B_{01}q_1 + B_{02}\tilde{q} = 0 = [B_{00} - (C - \mu)]q_0$$

si ha $q_0 \in ker[B_{00} - (C - \mu)]$.

Si vede cosí che

$$ker[B - (C - \mu)] = \{(Me^{-Ca}, 0, 0, ...), M \in \mathbb{K}\}$$

6.5.2 $\frac{hK}{c-K} - (\mu + \alpha + \sigma) \in \sigma_p(B)$

Ciò viene provato in [6], alle pagine 51 e 52.

6.5.3 Molteplicità algebrica di $C - \mu$ e di $\frac{hK}{c+K} - (\mu + \alpha + \sigma)$

Provando che essi sono poli di ordine uno del risolvente $R[\lambda, B]$ si prova che essi hanno molteplicità algebrica uno.
Si suppone sempre che $C > 0$, affinché $C - \mu$ sia un autovalore, che $C - \mu$ sia distinto da $\frac{hK}{c-K} - (\mu + \alpha + \sigma)$ e che $\frac{hK}{c+K} - (\mu + \alpha + \sigma) > -\mu$.
Il risolvente di B si può scrivere in funzione dei risolventi di B_{00}, B_{11} e B_2, usando quanto visto al paragrafo 6.3 cosí:

$$R[\lambda, B]f = \begin{bmatrix} R[\lambda, B_{00}]\{f_0 - B_{01}R[\lambda, B_{11}][f_1 - B_{12}R[\lambda, B_2]\tilde{f}] - \\ -B_{02}R[\lambda, B_2]\tilde{f}\} \\ \\ R[\lambda, B_{11}]\{f_1 - B_{12}R[\lambda, B_2]\tilde{f}\} \\ \\ R[\lambda, B_2]\tilde{f} \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

Se λ è una singolarità per $R[\lambda, B_{00}]$ oppure $R[\lambda, B_{11}]$ oppure $R[\lambda, B_2]$, allora lo è anche per $R[\lambda, B]$ perché non si potrà calcolare $R[\lambda, B_*]*$.

Se $\bar{\lambda}$ è un polo di ordine uno per $R[\lambda, B_2]$ ciò significa che $\lambda \mapsto \lambda R[\lambda, B_2]$ diventa regolare per $\lambda = \bar{\lambda}$, come nel caso delle funzioni di variabile complessa.

$$\lambda R[\lambda, B]f =$$

$$\begin{bmatrix} R[\bar{\lambda}, B_{00}]\{\bar{\lambda} f_0 - B_{01}R[\bar{\lambda}, B_{11}][\bar{\lambda} f_1 - B_{12}\lambda R[\lambda, B_2]\tilde{f}] - B_{02}\bar{\lambda} R[\bar{\lambda}, B_2]\tilde{f}\} \\ R[\bar{\lambda}, B_{11}]\{\bar{\lambda} f_1 - B_{12}\lambda R[\lambda, B_2]\tilde{f}\} \\ \lambda R[\lambda, B_2]\tilde{f} \end{bmatrix}$$

si vede che $\lambda \mapsto \lambda R[\lambda, B]$ è regolare in $\bar{\lambda}$ (perché lo è $\bar{\lambda} R[\bar{\lambda}, B_2]$ e $\bar{\lambda} < \min[C - \mu, \frac{hK}{c+K} - (\mu + \alpha + \sigma)]$), quindi $\bar{\lambda}$ è un polo di ordine uno anche per $R[\lambda, B]$.
Similmente, essendo $\frac{hK}{c+K} - (\mu + \alpha + \sigma)$ un polo di ordine uno per $R[\lambda, B_{11}]$, allora scrivendo

$$\lambda R[\lambda, B]f =$$

$$\begin{bmatrix} R[\lambda, B_{00}]\{\lambda f_0 - B_{01}\lambda R[\lambda, B_{11}][f_1 - B_{12}R[\lambda, B_2]\tilde{f}] - \lambda B_{02}R[\lambda, B_2]\tilde{f}\} \\ \lambda R[\lambda, B_{11}]\{f_1 - B_{12}R[\lambda, B_2]\tilde{f}\} \\ \lambda R[\lambda, B_2]\tilde{f} \end{bmatrix}$$

si vede che ora $\lambda \mapsto \lambda R[\lambda, B]$ è regolare in $\frac{hK}{c+K} - (\mu + \alpha + \sigma)$, quindi $\frac{hK}{c+K} - (\mu + \alpha + \sigma)$ è un polo di ordine uno per $R[\lambda, B]$.
E infine, essendo $C - \mu$ un polo di ordine uno per $R[\lambda, B_{00}]$, allora, scrivendo

$$\lambda R[\lambda, B]f =$$

$$\begin{bmatrix} \lambda R[\lambda, B_{00}]\{f_0 - B_{01}R[\lambda, B_{11}][f_1 - B_{12}R[\lambda, B_2]\tilde{f}] - B_{02}R[\lambda, B_2]\tilde{f}\} \\ \lambda R[\lambda, B_{11}]\{f_1 - B_{12}R[\lambda, B_2]\tilde{f}\} \\ \lambda R[\lambda, B_2]\tilde{f} \end{bmatrix}$$

con un ragionamento analogo si conclude che esso lo è per $R[\lambda, B]$.

In definitiva, $C - \mu$ e $\frac{hK}{c+K} - (\mu + \alpha + \sigma)$ essendo poli di ordine uno per i risolventi di B_{00} e B_{11}, essendo distinti e maggiori di $-\mu$, essi lo sono anche per $R[\lambda, B]$, e pertando essi hanno molteplicità algebrica pari a uno.

6.6 Crescita esponenziale asincrona nel modello

A seconda di come sono disposti gli elementi dello spettro $-\mu$, $\frac{hK}{c+K} - (\mu + \alpha + \sigma)$ e $C - \mu$ (se $C > 0$) si è in grado di individuare delle condizioni sufficienti affinché ci sia A.E.G. Essa si presenta quando $C - \mu$ domina strettamente, o quando $\frac{hK}{c+K} - (\mu + \alpha + \sigma)$ domina strettamente, i.e. nei seguenti casi:

- $C - \mu > \frac{hK}{c+K} - (\mu + \alpha + \sigma)$ e $C - \mu > -\mu$

- $\frac{hK}{c+K} - (\mu + \alpha + \sigma) > C - \mu$ e $\frac{hK}{c+K} - (\mu + \alpha + \sigma) > -\mu$

Gli altri casi sono da ritenersi casi particolari e necessitano uno studio a sé.

Bibliografia

[1] Ph. Clément, H. J. A. M. Heijmans, S. Angenent, C. J. van Duijn, B. de Pagter *One-Parameter Semigroups* NHPC, Paesi Bassi, 1987

[2] M. Iannelli *Mathematical Theory of Age-Structured Population Dynamics* Giardini Editori e Stampatori in Pisa, Italia, 1994

[3] G. Gripenberg, S. O. London, O. Staffans *Volterra Integrals and Functional Equations* Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1990

[4] A. Pazy *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo

[5] K. Engel, R. Nagel *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations* Springer, 2000

[6] L. Tonetto *An age-structured non linear model for a polupation infected by macroparasites* Ph.D. Thesis, Università degli Studi di Trento, Dipartimento di Matematica

[7] O. Arino, E. Sánchez, G. Webb *Necessary and sufficient Conditions for Asynchronus Exponential Growth in Age Structured Cell Populations with Quiescence* Journal of Mathematical Analysis and Applications 215, 499-513 (1997), article no. AY975654

[8] J. Dyson, R. Bressan Villella, G. F. Webb *Asynchronus Exponential Growth in an Age Structured Population of Proliferating and Quiescent Cells*

[9] E. Sánchez *Asynchronus Exponential Growth (A.E.G.) and Semigroup Theory* dispense